ANTONIO MAMBRIANI (*).

Su le funzioni wronskiane.

1. – Introduzione.

1.1. – Poniamo anzitutto la seguente definizione:

« Una funzione univoca $\{ f(x), (a \dots b) \}$ (1) si dirà una *funzione wronskiana* quando:

1°) Essa è derivabile, con derivata $\{ f'(x), (a \dots b) \}$ continua.

2°) Esiste una seconda funzione univoca $\{ \varphi(x), (a \dots b) \}$ derivabile, con derivata $\{ \varphi'(x), (a \dots b) \}$ continua, tale che sia

$$
(1.1) \qquad W[f(x), \varphi(x)] \equiv \begin{vmatrix} f(x) & \varphi(x) \\ f'(x) & \varphi'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \text{per ogni } x \text{ di } (a \dots b). \text{ »} \ (2)
$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma (Italia).

(1) Con una scrittura della forma $\{ f(x), (a \dots b) \}$ intendo indicare una funzione, di una variabile reale x, definita per tutti gli x di un intervallo $(a \dots b)$.

(2) Più precisamente, questa funzione si chiamerà *funzione wronskiana di primo ordine,* mentre si dirà *funzione wronskiana di ordine* n (essendo n un intero $\geqslant 2$) una funzione $\{ f(x), (a \dots b) \}$ quando:

1°) Essa è univoca e derivabile fino all'ordine n, con derivate tutte continue.

2°) Esistono n funzioni $\{ \varphi_1(x), (a \dots b) \}, \dots, \{ \varphi_n(x), (a \dots b) \}$, tutte derivabili fino all'ordine n e con derivate tutte continue, tali che sia

$$
W[f(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] \equiv \begin{vmatrix} f(x) & \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ f'(x) & \varphi_1'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f^{(n)}(x) & \varphi_1^{(n)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ per ogni } x \text{ di } (a \dots b)\,.
$$

Dato che in questa Nota si considerano solo funzioni wronskiane di primo ordine non può fare equivoco la soppressione della precisazione « di primo ordine ».

1.2. – Consideriamo ora una equazione differenziale, lineare, omogenea, di secondo ordine, della forma

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + p(x)\frac{dy(x)}{dx} + q(x)y(x) = 0 \tag{1.2}$$

$$\text{con} \begin{cases} x \in (a \dots b)\,, \\ \{p(x),\,(a\dots b)\} \quad \text{e} \quad \{q(x),\,(a\dots b)\} \\ \text{funzioni univoche e continue.} \end{cases}$$

Si nota subito che *tutte le soluzioni* $\{y(x),\ (a \dots b)\}$ *di* (1.2), *ad eccezione di* $y(x) \equiv 0$, *sono funzioni wronskiane.* Invero, se $\{y_1(x),\ (a \dots b)\}$ è una soluzione, e consideriamo un'altra soluzione $\{y_2(x),\ (a \dots b)\}$ linearmente indipendente dalla precedente (e, come si sa, una tale soluzione esiste sempre), risulta, essendo c_0 una costante non nulla,

$$W[y_1(x),\, y_2(x)] \equiv c_0 \cdot \exp\left(-\int_a^x p(t)\,dt\right) \neq 0 \qquad \text{per ogni } x \text{ di } (a \dots b)\,.$$

Tali soluzioni sono però, nel campo reale, delle *funzioni wronskiane alquanto particolari,* perchè hanno le derivate seconde e inoltre queste derivate seconde sono continue, ciò che non richiede la definizione sopra posta. In onore allo studio che ne fatto lo STURM, queste particolari funzioni wronskiane si diranno *funzioni di Sturm.*

1.3. – Ecco l'oggetto della presente Nota:

1°) Porre in evidenza quanto sia esteso l'insieme delle funzioni wronskiane (spazio wronskiano).

2°) Mostrare che numerose delle notevoli e ben note proprietà di cui godono le funzioni di STURM appartengono più estesamente a tutte le funzioni wronskiane.

2. – Funzioni wronskiane coniugate.

Dalla precedente definizione di funzione wronskiana risulta subito che anche la funzione $\{\varphi(x),\ (a \dots b)\}$, considerata in tale definizione, è una funzione wronskiana. Diremo che le due funzioni

$$\{f(x),\ (a \dots b)\}\,, \qquad \{\varphi(x),\ (a \dots b)\}$$

di detta definizione sono *funzioni wronskiane coniugate,* e inoltre che *una di* *esse è coniugata dell'altra.* In particolare, si parlerà di *funzioni di Sturm coniugate.*

Abbiamo dunque che « una funzione wronskiana $\{ f(x), (a \dots b) \}$ ha sempre, per la sua stessa definizione, una coniugata $\{ \varphi(x), (a \dots b) \}$ »; conviene anzi osservare che « una funzione wronskiana $\{ f(x), (a \dots b) \}$ ha infinite coniugate, almeno tutte le funzioni $\{ c\varphi(x), (a \dots b) \}$ con c costante qualsiasi non nulla ».

Esempi. Le funzioni $\{ \cos x, (a \dots b) \}$ e $\{ \operatorname{sen} x, (a \dots b) \}$, per le quali è $W[\cos x, \operatorname{sen} x] \equiv 1$, sono wronskiane coniugate qualunque sia l'intervallo $(a \dots b)$. Le funzioni $\{ x, (a \dots b) \}$ e $\{ x^2, (a \dots b) \}$, per le quali è $W[x, x^2] \equiv x^2$, sono wronskiane coniugate in ogni intervallo $(a \dots b)$ non contenente l'origine. Le funzioni $\{ e^x, (a \dots b) \}$ e $\{ x^2, (a \dots b) \}$, per le quali è $W[e^x, x^2] \equiv x(2-x)e^x$, sono wronskiane coniugate in ogni intervallo $(a \dots b)$ non contenente $x = 0$ e $x = 2$. Gli esempi ora dati sono anche esempi di funzioni di STURM, invece le funzioni

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^3 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{per} \quad x \neq 0\,, \\ 1 & \text{per} \quad x = 0\,, \end{cases} \qquad \varphi(x) = \begin{cases} x + x^3 \cos \dfrac{1}{x} & \text{per} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{per} \quad x = 0, \end{cases}$$

sono certamente coniugate in un intorno convenientemente piccolo della origine, ma non sono certo funzioni di STURM in tale intorno (esse, infatti, non hanno derivate seconde per $x = 0$).

3. – Classi di funzioni wronskiane.

3.1. – Anzitutto, come si è osservato nella introduzione, *sono funzioni wronskiane tutte le funzioni di Sturm.*

In particolare, una costante *non nulla*, una qualunque funzione razionale intera di primo grado sono delle funzioni di STURM [in quanto soluzioni della equazione $y''(x) = 0$] e sono quindi anche delle funzioni wronskiane.

3.2. – *Una funzione (univoca) $\{ f(x), (a \dots b) \}$ derivabile con derivata continua, per la quale esistano due costanti c_1 e c_2 tali che la funzione*

$$\{ c_1 f(x) + c_2 f'(x), (a \dots b) \}$$

sia mai nulla, è una funzione wronskiana.

In particolare, facendo $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$, oppure $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$, si ha: *Una funzione $\{ f(x), (a \dots b) \}$ derivabile con derivata continua, se è mai nulla oppure se ha la derivata mai nulla, è una funzione wronskiana.*

Per dimostrare, anzitutto, la prima di queste due ultime affermazioni, basta osservare che è

$$W[f(x),\, xf(x)] = f(x)^2 .$$

Per concludere, poi, con la proposizione generale enunciata in principio, basta osservare ancora che, essendo $c_2 \neq 0$, si ha

$$W[f(x),\, -c_2 e^{-\frac{c_1}{c_2}x}] = e^{-\frac{c_1}{c_2}x}\,[c_1 f(x) + c_2 f'(x)] .$$

Come applicazione, possiamo affermare:

Le funzioni del tipo $\{ e^{\mu(x)}, (a \dots b) \}$, *dove* $\{ \mu(x), (a \dots b) \}$ *è una qualunque funzione derivabile con derivata continua, sono tutte wronskiane.* Perciò, *le soluzioni delle equazioni differenziali, lineari, omogenee, di primo ordine,*

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0 , \quad \textit{con} \quad \{ p(x), (a \dots b) \} \ \textit{continua},$$

sono tutte funzioni wronskiane; avendosi qui

$$\mu(x) = -\int_a^x p(t)\, dt + c , \qquad \text{con } c \text{ costante.}$$

Abbiamo ancora che *le potenze, con esponente costante, di una funzione wronskiana mai nulla, sono funzioni wronskiane.* Invero tali potenze sono pure funzioni mai nulle, derivabili e con derivate continue.

3.3. – *Se* $\{ f(x), (a \dots b) \}$ *e* $\{ g(x), (a \dots b) \}$ *sono funzioni wronskiane e una di esse non è mai nulla, anche il prodotto* $\{ f(x)g(x), (a \dots b) \}$ *è una funzione wronskiana.* Invero, se supponiamo $\{ g(x), (a \dots b) \}$ mai nulla e $\{ \varphi(x), (a \dots b) \}$ è una coniugata di $\{ f(x), (a \dots b) \}$, abbiamo

$$W[f(x)g(x),\, \varphi(x)g(x)] \equiv g(x)^2 \cdot W[f(x),\, \varphi(x)] .$$

In particolare, *moltiplicando una funzione wronskiana per una costante non nulla, si ottiene una funzione wronskiana.* Dalla dimostrazione precedente risulta che *moltiplicando due funzioni wronskiane coniugate per una stessa funzione wronskiana mai nulla, si ottengono altre due funzioni wronskiane coniugate.*

3.4. – *Se* $\{ f(x), (a \dots b) \}$ *e* $\{ \psi(x), (\alpha \dots \beta) \}$ *sono funzioni wronskiane, se la seconda funzione ha valori appartenenti tutti ad* $(a \dots b)$ *e inoltre ha derivata mai nulla, allora anche la funzione di funzione* $\{ f(\psi(x)), (\alpha \dots \beta) \}$ *è una funzione wronskiana.*

Invero, se $\{ \varphi(x), (a \dots b) \}$ è coniugata di $\{ f(x), (a \dots b) \}$, si ha

$$W[f(\psi(x)),\, \varphi(\psi(x))] \equiv \psi'(x) \cdot \{ W[f(t),\, \varphi(t)] \}_{t=\psi(x)} .$$

3.5. – *Se* $\{f(x), (a \ldots b)\}$ *e* $\{\varphi(x), (a \ldots b)\}$ *sono funzioni wronskiane coniugate, sono pure funzioni wronskiane tutte le funzioni*

$$\{cf(x) + \varkappa\varphi(x), (a \ldots b)\},$$

essendo c, $\varkappa$ *costanti qualsiasi non contemporaneamente nulle.*

Invero, supposto ad esempio $c \neq 0$, abbiamo

$$W[cf(x) + \varkappa\varphi(x), \varphi(x)] \equiv W[cf(x), \varphi(x)] \equiv cW[f(x), \varphi(x)].$$

4. – Prime proprietà delle funzioni wronskiane.

4.1. – Siano $\{f(x), (a \ldots b)\}$ e $\{\varphi(x), (a \ldots b)\}$ funzioni wronskiane coniugate. Dalla diseguaglianza alla quale soddisfano, per definizione, queste funzioni, cioè da

$$W[f(x), \varphi(x)] \equiv \begin{vmatrix} f(x) & \varphi(x) \\ f'(x) & \varphi'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{per ogni } x \text{ di } (a \ldots b), \tag{4.1}$$

discendono facilmente le importanti proprietà seguenti.

4.2. – *Una funzione wronskiana ha gli zeri (se ne possiede) tutti semplici (cioè, di primo ordine).* Invero, se α fosse uno zero almeno doppio della funzione wronskiana $\{f(x), (a \ldots b)\}$ si avrebbe $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ e ne seguirebbe che il wronskiano $W[f(x), \varphi(x)]$ si annullerebbe per $x = \alpha$, contrariamente a (4.1).

4.3. – *Una funzione wronskiana in ogni intervallo limitato ha sempre un numero finito di zeri (in particolare, nessun zero).* Infatti, se $x = \xi$ fosse un valore (finito) di accumulazione di zeri della funzione wronskiana $\{f(x), (a \ldots b)\}$, dovrebbe aversi $f(\xi) = 0$ ed anche $f'(\xi) = 0$, ciò che non è possibile per (4.1).

4.4. – *Due funzioni wronskiane coniugate non possono avere uno stesso zero.* Invero, se le due funzioni wronskiane coniugate del n. 4.1 si annullassero insieme in un punto α appartenente ad $(a \ldots b)$, cioè fosse $f(\alpha) = \varphi(\alpha) = 0$, il wronskiano $W[f(x), \varphi(x)]$ sarebbe nullo per $x = \alpha$, contrariamente a (4.1).

4.5. – *Le derivate (prime) di due funzioni wronskiane coniugate non possono avere uno stesso zero.* Invero, se per le due funzioni wronskiane coniugate del n. 4.1 si avesse, in uno stesso punto α di $(a \ldots b)$, $f'(\alpha) = \varphi'(\alpha) = 0$, il wronskiano $W[f(x), \varphi(x)]$ sarebbe nullo per $x = \alpha$, contrariamente a (4.1).

Ne segue che *due funzioni wronskiane coniugate non possono avere uno stesso estremante.*

4.6. – *Due funzioni wronskiane coniugate nei punti dove hanno valori (non nulli) eguali hanno sempre derivate diseguali, e analogamente nei punti dove le derivate (non nulle) sono eguali hanno sempre valori diseguali.* Altrimenti la (4.1) non potrebbe valere.

5. – Rapporto di due funzioni wronskiane coniugate e zeri di due simili funzioni.

5.1. – Siano $\{ f(x), (a \dots b) \}$ e $\{ \varphi(x), (a \dots b) \}$ due funzioni wronskiane coniugate, e consideriamo il rapporto

$$R(x) \equiv \frac{\varphi(x)}{f(x)} .$$

Questo rapporto risulta definito in tutto $(a \dots b)$ ad eccezione degli eventuali zeri del denominatore, nei quali ha degli *infiniti del primo ordine*, poichè in essi il numeratore non si annulla (cfr. n. 4.2). Questo rapporto dove è definito è derivabile e si ha

$$R'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{f(x)^2} W[f(x), \varphi(x)] \neq 0 ,$$

onde *il rapporto $R(x)$ sarà o crescente o decrescente.*

Se è $W[f(x), \varphi(x)] > 0$, il rapporto $R(x)$ risulta crescente, e se α è uno zero del denominatore si ha

$$R(\alpha - 0) = +\infty , \qquad R(\alpha + 0) = -\infty$$

[intendendo, supposto $a < b$, che se è $\alpha = a$ si considererà solo $R(\alpha + 0)$, se è $\alpha = b$ si considererà solo $R(\alpha - 0)$]. In tale caso, richiamandoci alla funzione $\operatorname{tg} x$, diremo che il rapporto $R(x)$ ha *andamento tangenziale.* Se invece è $W[f(x), \varphi(x)] < 0$, il rapporto risulta decrescente, e se α è uno zero del denominatore si ha

$$R(\alpha - 0) = -\infty , \qquad R(\alpha + 0) = +\infty$$

[si intende, essendo sempre $a < b$, che se è $\alpha = a$ si considererà solo $R(\alpha + 0)$, se è $\alpha = b$ si considererà solo $R(\alpha - 0)$]. Diremo ora, richiamandoci alla funzione $\operatorname{ctg} x$, che il rapporto $R(x)$ ha *andamento cotangenziale.*

Dunque: *Il rapporto di due funzioni wronskiane coniugate è, nel suo campo di definizione, una funzione o crescente o decrescente; più precisamente, è, rispettivamente, una funzione ad andamento tangenziale o ad andamento cotangenziale.*

5.2. – Se, quindi, nel rapporto $R(x)$ il denominatore ha i due zeri consecutivi α, α_1, con $\alpha < \alpha_1$, i due numeri

$$R(\alpha + 0)\,, \qquad R(\alpha_1 - 0)$$

sono entrambi infiniti e di segno opposto, e il rapporto varia assumendo, nell'intervallo $\alpha < x < \alpha_1$, tutti i valori reali e ciascuno una sola volta. Onde, fissato un numero k qualsiasi (reale), esiste nel detto intervallo un x_k e uno solo tale che sia

$$\frac{\varphi(x_k)}{f(x_k)} = k\,, \qquad \text{ossia} \qquad \varphi(x_k) = kf(x_k)\,.$$

Considerando, in particolare, il caso $k = 0$ possiamo concludere:

Fra due zeri consecutivi di una funzione wronskiana vi è uno zero e uno solo di una qualunque sua funzione coniugata. Pertanto, *gli zeri di due funzioni wronskiane coniugate si separano mutualmente.*

Possiamo dire ancora: *Una funzione wronskiana oscillante lungo l'asse delle x ha le sue coniugate pure tutte oscillanti lungo l'asse delle x.*

6. – Una limitazione inferiore delle distanze di due zeri consecutivi di una funzione wronskiana.

Siano $\{ f(x), (a \dots b) \}$ e $\{ \varphi(x), (a \dots b) \}$ due funzioni wronskiane coniugate, siano α e α_1 (con $\alpha < \alpha_1$) due zeri consecutivi della prima funzione e β lo zero (unico) della seconda funzione internamente all'intervallo $(\alpha \dots \alpha_1)$ (cfr. n. 5.2).

Abbiamo

$$\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \{ f(x)\varphi(x) \}\, \mathrm{d}x = [f(x)\varphi(x)]_\alpha^\beta = 0\,,$$

ossia

$$\int_\alpha^\beta \{ f'(x)\varphi(x) + f(x)\varphi'(x) \}\, \mathrm{d}x = 0$$

od anche

$$\int_\alpha^\beta f'(x)\varphi(x)\, \mathrm{d}x = -\int_\alpha^\beta f(x)\varphi'(x)\, \mathrm{d}x\,. \tag{6.1}$$

Ne segue

$$\int_\alpha^\beta W[f(x), \varphi(x)]\, \mathrm{d}x = 2\int_\alpha^\beta f(x)\varphi'(x)\, \mathrm{d}x = -2\int_\alpha^\beta f'(x)\varphi(x)\, \mathrm{d}x\,. \tag{6.2}$$

Quindi, poichè $W[f(x), \varphi(x)]$ non muta segno in $(\alpha \dots \beta)$,

$$\int_\alpha^\beta | W[f(x), \varphi(x)] | \, dx \leqslant 2 \int_\alpha^\beta | f(x)\varphi'(x) | \, dx . \tag{6.3}$$

Indichiamo ora con $M_{|f'|}$ e $M_{|\varphi'|}$ rispettivamente i massimi di $|f'|$ e $|\varphi'|$ in $(a \dots b)$, e ancora diciamo $m_{|W|}$ il minimo di $| W[f(x), \varphi(x)] |$ in $(a \dots b)$. Da (6.3) abbiamo allora

$$\int_\alpha^\beta | W[f(x), \varphi(x)] | \, dx \leqslant 2 M_{|\varphi'|} \cdot \int_\alpha^\beta | f(x) | \, dx . \tag{6.4}$$

Ma, pel teorema del valor medio e per x in $(\alpha \dots \beta)$, è

$$f(x) - f(\alpha) = f'(x_1) \cdot (x - \alpha) ,$$

essendo x_1 un valore conveniente di $(\alpha \dots \beta)$, ossia

$$f(x) = f'(x_1) \cdot (x - \alpha) , \qquad | f(x) | = | f'(x_1) | \cdot (x - \alpha) \leqslant M_{|f'|} \cdot (x - \alpha) ,$$

onde

$$\int_\alpha^\beta | f(x) | \, dx \leqslant M_{|f'|} \cdot \int_\alpha^\beta (x - \alpha) \, dx = M_{|f'|} \frac{(\beta - \alpha)^2}{2} .$$

Sostituendo questo risultato in (6.4), abbiamo

$$\int_\alpha^\beta | W[f(x), \varphi(x)] | \, dx \leqslant M_{|f'|} M_{|\varphi'|} \cdot (\beta - \alpha)^2 . \tag{6.5}$$

E poichè si ha ancora

$$m_{|W|} \cdot (\beta - \alpha) \leqslant \int_\alpha^\beta | W [f(x), \varphi(x)] | \, dx ,$$

tenendo presente (6.5) otteniamo

$$m_{|W|} \cdot (\beta - \alpha) \leqslant M_{|f'|} M_{|\varphi'|} \cdot (\beta - \alpha)^2 ,$$

da cui

$$\beta - \alpha \geqslant \frac{m_{|W|}}{M_{|f'|} M_{|\varphi'|}} , \tag{6.6}$$

dove va notato che, per la continuità di $W[f(x), \varphi(x)]$ in $(a \dots b)$ risulta $m_{|W|} > 0$.

In modo completamente analogo si prova che è

$$\alpha_1 - \beta \geqslant \frac{m_{|W|}}{M_{|f'|}M_{|\varphi'|}},$$

la quale sommata con (6.6) ci dà la formula

$$(6.7) \qquad \alpha_1 - \alpha \geqslant \frac{2m_{|W|}}{M_{|f'|}M_{|\varphi'|}},$$

formula che dà una valutazione inferiore della distanza di due zeri consecutivi di una funzione wronskiana.

Ad esempio, nel caso particolare $f(x) \equiv \cos x$, assumendo $\varphi(x) \equiv \operatorname{sen} x$, la (6.7) ci dà $\alpha_1 - \alpha \geqslant 2$, mentre sappiamo che è $\alpha_1 - \alpha = \pi$.

7. – Concetto di famiglia completa di funzioni wronskiane.

Nel n. 3.5 abbiamo osservato che se $\{ f(x), (a \dots b) \}$ e $\{ \varphi(x), (a \dots b) \}$ sono funzioni wronskiane coniugate, sono pure wronskiane tutte le funzioni

$$(\mathcal{Y}) \qquad \{ y(x) \equiv cf(x) + \varkappa\varphi(x), (a \dots b) \},$$

essendo c e $\varkappa$ costanti qualsiasi *non contemporaneamente nulle.*

Notiamo ora che, fissata nella famiglia $(\mathcal{Y})$ di funzioni una qualunque funzione

$$\{ y_1(x) \equiv c_1 f(x) + \varkappa_1\varphi(x), (a \dots b) \},$$

esiste sempre nella famiglia stessa una coniugata di tale funzione. Invero, basta fissare due costanti c_2, $\varkappa_2$ tali che sia $c_1\varkappa_2 - c_2\varkappa_1 \neq 0$, poichè allora la funzione

$$\{ y_2(x) \equiv c_2 f(x) + \varkappa_2\varphi(x), (a \dots b) \}$$

è coniugata di $\{ y_1(x), (a \dots b) \}$ in quanto si ha

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 f(x) + \varkappa_1\varphi(x) & c_2 f(x) + \varkappa_2\varphi(x) \\ c_1 f'(x) + \varkappa_1\varphi'(x) & c_2 f'(x) + \varkappa_2\varphi'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & \varkappa_1 \\ c_2 & \varkappa_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f(x) & \varphi(x) \\ f'(x) & \varphi'(x) \end{vmatrix}.$$

Dunque, *la famiglia $(\mathcal{Y})$ di funzioni wronskiane è tale che ogni sua funzione ha nella famiglia stessa una sua coniugata* (*anzi infinite coniugate*).

Esprimeremo ciò brevemente dicendo che la famiglia $(\mathcal{Y})$ di funzioni wronskiane è una *famiglia completa di funzioni wronskiane.*

8. – Alcuni teoremi su le famiglie complete di funzioni wronskiane.

Teorema 1°. *In una famiglia completa di funzioni wronskiane*

$$\{ y(x) \equiv cf(x) + \varkappa\varphi(x),\ (a \ldots b) \}$$

(con c, $\varkappa$ costanti qualsiasi non contemporaneamente nulle) esiste sempre una ed una sola funzione soddisfacente alle condizioni (iniziali)

$$y(x_0) = \lambda_0 , \qquad y'(x_0) = \lambda_1 ,$$

essendo λ_0, λ_1 due costanti qualunque non contemporaneamente nulle ed x_0 un valore comunque scelto in $(a \ldots b)$.

Invero, basta notare che le due eguaglianze

$$cf(x_0) + \varkappa\varphi(x_0) = \lambda_0 , \qquad cf'(x_0) + \varkappa\varphi'(x_0) = \lambda_1$$

costituiscono un sistema lineare, normale, e non omogeneo, nelle costanti c e $\varkappa$.

Teorema 2°. *In una famiglia completa di funzioni wronskiane*

$$\{ y(x) \equiv cf(x) + \varkappa\varphi(x),\ (a \ldots b) \}$$

(con c, $\varkappa$ costanti qualsiasi non contemporaneamente nulle) esiste una ed una sola funzione soddisfacente alle condizioni (ai limiti)

$$y(x_1) = \lambda_1 , \qquad y(x_2) = \lambda_2 ,$$

essendo λ_1 e λ_2 due costanti qualsiasi non contemporaneamente nulle ed essendo x_1 e x_2 scelti in modo che nell'intervallo $(x_1 \ldots x_2)$ non vi siano zeri di almeno una funzione della famiglia.

Invero, basta notare che le due eguaglianze

$$cf(x_1) + \varkappa\varphi(x_1) = \lambda_1 , \qquad cf(x_2) + \varkappa\varphi(x_2) = \lambda_2$$

costituiscono un sistema lineare, normale, e non omogeneo, nelle costanti c e $\varkappa$ in quanto è proprio

$$f(x_1)\varphi(x_2) - f(x_2)\varphi(x_1) \neq 0$$

per il particolare modo come sono scelti x_1 e x_2. Infatti, se

$$\{ \bar{y}(x) \equiv \bar{c}f(x) + \bar{\varkappa}\varphi(x),\ (a \ldots b) \}$$

è una funzione della famiglia priva di zeri nell'intervallo $(x_1 \ldots x_2)$, consideriamo nella famiglia (cfr. n. 7) una funzione

$$\{ y_0(x) \equiv c_0 f(x) + \varkappa_0\varphi(x),\ (a \ldots b) \}$$

coniugata di $\{ \bar{y}(x), (a \dots b) \}$. Poichè il rapporto $y_0(x) : \bar{y}(x)$ è una funzione crescente o decrescente nell'intervallo $(x_1 \dots x_2)$ (cfr. n. 5.1), sarà

$$\frac{y_0(x_2)}{\bar{y}(x_2)} - \frac{y_0(x_1)}{\bar{y}(x_1)} \neq 0, \qquad \text{ossia} \qquad \frac{y_0(x_2)\bar{y}(x_1) - y_0(x_1)\bar{y}(x_2)}{\bar{y}(x_1)\bar{y}(x_2)} \neq 0,$$

ed anche

$$D = \begin{vmatrix} \bar{y}(x_1) & y_0(x_1) \\ \bar{y}(x_2) & y_0(x_2) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ma è

$$D = \begin{vmatrix} \bar{c}f(x_1) + \bar{\varkappa}\varphi(x_1) & c_0 f(x_1) + \varkappa_0 \varphi(x_1) \\ \bar{c}f(x_2) + \bar{\varkappa}\varphi(x_2) & c_0 f(x_2) + \varkappa_0 \varphi(x_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{c} & \bar{\varkappa} \\ c_0 & \varkappa_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f(x_1) & \varphi(x_1) \\ f(x_2) & \varphi(x_2) \end{vmatrix},$$

e quindi

$$f(x_1)\varphi(x_2) - f(x_2)\varphi(x_1) \neq 0.$$

Teorema 3°. *Si abbia una famiglia completa di funzioni wronskiane*

$$(\mathcal{Y}) \qquad \{ y(x) \equiv cf(x) + \varkappa\varphi(x), (a \dots b) \}.$$

Sono equivalenti le quattro affermazioni seguenti:

1°) *Nella famiglia* $(\mathcal{Y})$ *esistono delle funzioni prive di zeri.*

2°) *Nella famiglia* $(\mathcal{Y})$ *le funzioni hanno uno zero al più.*

3°) *Nella famiglia* $(\mathcal{Y})$ *esiste una e una sola funzione tale che sia*

$$y(\xi) = M, \qquad y(\eta) = N,$$

per ogni coppia ξ, η *di punti di* $(a \dots b)$ *e per ogni coppia* M, N *di valori prefissati non entrambi nulli.*

4°) *Risulta*

$$f(\xi)\varphi(\eta) - f(\eta)\varphi(\xi) \neq 0$$

per ogni coppia ξ, η *di punti di* $(a \dots b)$.

Dimostrazione. α) La equivalenza di 3°) e 4°) si prova immediatamente (si tenga presente il teorema 2° precedente).

β) Proviamo ora l'equivalenza di 1°) e 4°). Esista nella famiglia $(\mathcal{Y})$ una funzione $\{ y_1(x) \equiv c_1 f(x) + \varkappa_1\varphi(x), (a \dots b) \}$ priva di zeri, e sia $\{ y_2(x) \equiv c_2 f(x) + \varkappa_2\varphi(x), (a \dots b) \}$ una sua qualunque coniugata in questa famiglia, per il che sarà necessario e sufficiente che sia (n. 7) $c_1\varkappa_2 - c_2\varkappa_1 \neq 0$. Allora il rapporto $y_2(x) : y_1(x)$ risulta definito in tutto $(a \dots b)$ e ivi o crescente oppure decrescente (n. 5.1), onde sarà

$$\frac{y_2(\eta)}{y_1(\eta)} - \frac{y_2(\xi)}{y_1(\xi)} \neq 0 \quad \text{per ogni coppia } \xi, \eta \text{ di punti di } (a \dots b).$$

Ma essendo

$$\frac{y_2(\eta)}{y_1(\eta)} - \frac{y_2(\xi)}{y_1(\xi)} = \frac{c_1\varkappa_2 - c_2\varkappa_1}{y_1(\xi)y_1(\eta)} \begin{vmatrix} f(\xi) & \varphi(\xi) \\ f(\eta) & \varphi(\eta) \end{vmatrix},$$

si conclude proprio con la diseguaglianza da provare.

Viceversa, se vale la diseguaglianza di 4°), poichè $f(\xi)$, $\varphi(\xi)$ non possono essere contemporaneamente nulli e così pure dicasi per $f(\eta)$, $\varphi(\eta)$, la diseguaglianza di 4°) si può scrivere nella forma

$$\frac{\varphi(\xi)}{f(\xi)} \neq \frac{\varphi(\eta)}{f(\eta)} \quad \text{per ogni coppia } \xi, \eta \text{ di punti di } (a \dots b),$$

intendendo di attribuire a ciascuno dei due rapporti scritti valore infinito qualora il suo denominatore sia nullo (e se questa attribuzione vale per uno dei rapporti, non può valere contemporaneamente per l'altro rapporto). La precedente diseguaglianza equivale ad affermare che il rapporto

$$R(x) \equiv \frac{\varphi(x)}{f(x)}, \qquad (a \dots b)$$

assume valori (finiti o no) tutti diversi. A questa affermazione va poi associata l'altra (n. 6.1) che questo rapporto, in ogni intervallo ove risulta finito, è sempre crescente oppure sempre decrescente.

Intanto $\{ f(x), (a \dots b) \}$ non può avere due zeri [e tanto meno di più], in quanto se avesse due zeri la diseguaglianza di 4°) non sarebbe più valida prendendo per ξ e η tali zeri. Distinguerò allora tre casi possibili:

La $\{ f(x), (a \dots b) \}$ non ha zeri. In tale caso questa funzione è già una di quelle di cui si vuole dimostrare l'esistenza.

La $\{ f(x), (a \dots b) \}$ ha uno zero in uno dei punti a, b (e sia $a < b$); per fissare le idee supponiamo in b. Sarà $R(b-0) = +\infty$ oppure $R(b-0) = -\infty$, a seconda che $R(x)$ è crescente o decrescente. Supponiamo sia precisamente $R(b-0) = +\infty$. Risulterà

$$R(a) \leqslant R(x) < +\infty \qquad \text{per} \quad a \leqslant x < b.$$

Detto allora c_0 un qualunque valore minore di $R(a)$, abbiamo

$$c_0 - \frac{\varphi(x)}{f(x)} \neq 0 \quad \text{in tutto } (a \dots b),$$

ossia

$$c_0 f(x) - \varphi(x) \neq 0 \qquad \text{in tutto} \quad (a \dots b),$$

cioè una funzione cercata della famiglia è $\{ c_0 f(x) - \varphi(x), (a \dots b) \}$.

La $\{ f(x), (a \dots b) \}$ ha uno zero interno ad $(a \dots b)$. Dovendo aversi $R(a) \neq R(b)$, supporremo, per fissare le idee, $R(a) > R(b)$ (analogamente si ragionerebbe in caso opposto). Allora il rapporto $R(x)$ dovrà essere crescente, perchè, se fosse decrescente, i valori di $R(x)$ in $(a \dots b)$ non potrebbero essere certamente tutti distinti. Ne segue che tale rapporto non può assumere alcun valore dell'intervallo $(R(b) \dots R(a))$. Pertanto, detto c_0 uno di questi valori, si ha

$$c_0 - \frac{\varphi(x)}{f(x)} \neq 0 \text{ in tutto } (a \dots b), \quad \text{ossia } c_0 f(x) - \varphi(x) \neq 0 \text{ in tutto } (a \dots b),$$

cioè una funzione cercata è $\{ c_0 f(x) - \varphi(x), (a \dots b) \}$.

γ) Per concludere con il teorema enunciato, basterà provare ancora la equivalenza fra le affermazioni 1°) e 2°) del teorema. Se nella famiglia $(\mathcal{Y})$ esistono funzioni prive di zeri, necessariamente le funzioni di tale famiglia hanno uno zero al più. Poichè se vi fosse nella famiglia una funzione $\{ y_1(x) \equiv c_1 f(x) + \varkappa_1 \varphi(x), (a \dots b) \}$ con due zeri x_0, x_1, detta $\{ y_2(x) \equiv c_2 f(x) + \varkappa_2 \varphi(x), (a \dots b) \}$ una funzione coniugata alla precedente (e per questo basterà sia $c_1 \varkappa_2 - c_2 \varkappa_1 \neq 0$), si avrebbe

$$\begin{vmatrix} c_1 f(x_0) + \varkappa_1 \varphi(x_0) & c_2 f(x_0) + \varkappa_2 \varphi(x_0) \\ c_1 f(x_1) + \varkappa_1 \varphi(x_1) & c_2 f(x_1) + \varkappa_2 \varphi(x_1) \end{vmatrix} = 0,$$

d'altra parte qui il primo membro si può scrivere

$$\begin{vmatrix} c_1 & \varkappa_1 \\ c_2 & \varkappa_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f(x_0) & \varphi(x_0) \\ f(x_1) & \varphi(x_1) \end{vmatrix},$$

dove il primo fattore non è nullo e il secondo fattore è pure non nullo per quanto si è provato a β): dunque un assurdo.

Se le funzioni della famiglia $(\mathcal{Y})$ hanno uno zero al più, esistono necessariamente in $(\mathcal{Y})$ delle funzioni prive di zeri. Invero (3), diciamo ora $\{ y_1(x), (a \dots b) \}$ e $\{ y_2(x), (a \dots b) \}$ due funzioni della famiglia tali che sia $y_1(a) = 0$, $y_2(b) = 0$ (e una coppia di simili funzioni esiste sempre). Per l'ipotesi fatta dovrà aversi $y_1(b) \neq 0$, $y_2(a) \neq 0$. Prendiamo allora due costanti qualsiasi $l > 0$, $m > 0$ e consideriamo la funzione della famiglia data da

$$y_0(x) \equiv \frac{m}{y_1(b)} y_1(x) + \frac{l}{y_2(a)} y_2(x), \qquad (a \dots b),$$

per la quale si ha $y_0(a) = l > 0$, $y_0(b) = m > 0$. Se questa funzione avesse uno zero, avrebbe necessariamente due zeri, e ciò in contrasto con le ipotesi; pertanto essa non ha zeri.

(3) Seguo qui un ragionamento che figura in G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Parte I, 2ª ediz., Zanichelli, Bologna 1948, [p. 196, c)].