MARIO MORETTI (*)

Una formula e sua applicazione alla risoluzione di una classe di equazioni differenziali lineari. (**)

In questa breve Nota dimostro dapprima il seguente teorema:

Dato un polinomio $P_n(x)$, intero nella x, di grado n, e data una funzione $f(x)$ che nel suo campo di definizione sia derivabile fino all'ordine n, esiste un sistema (ed uno solo) di n costanti $a_{n,0}$, $a_{n,1}, \dots, a_{n,n}$ tale che sia

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!} \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}x^r} P_n(x) \cdot \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}x^r} f(x) \equiv e^{-x^2/2} \sum_{r=0}^{n} a_{n,r} \cdot \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}x^r} \{ e^{x^2/2} f(x) \} . \tag{1}$$

Applico poi la formula (1) alla risoluzione di una generica equazione differenziale ordinaria, lineare, d'ordine n, della forma

$$\frac{P_n^{(n)}}{n!} y^{(n)} + \frac{P_n^{(n-1)}}{(n-1)!} y^{(n-1)} + \dots + \frac{P_n''}{2!} y'' + \frac{P_n'}{1!} y' + P_n y = 0 , \tag{2}$$

indicando con $P_n = P_n(x)$ un dato polinomio intero in x, di grado n, e con P_n', P_n'', ..., $P_n^{(n)}$ le successive derivate di tale polinomio, ed inoltre indicando con $y = y(x)$ una funzione incognita e con y', y'', ..., $y^{(n)}$ le successive derivate.

1. - Prova della (1).

Ragiono per induzione. La formola (1) è vera per $n = 1$. Invero, posto

$$P_1(x) \equiv A_{1,0} + A_{1,1}x ,$$

con $A_{1,0}$, $A_{1,1}$ date costanti, il primo membro di (1) si scrive

$$(A_{1,0} + A_{1,1}x) f(x) + A_{1,1} f'(x) \equiv A_{1,0} f(x) + A_{11} \{ x f(x) + f'(x) \} ,$$

ed essendo, posto $\mathrm{D} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$,

(*) Indirizzo: Via E. Tazzoli, 30 – Mantova (Italia).

(**) Lavoro eseguito nell'Istituto di Matematica dell'Università di Parma. Ricevuto il 2-III-1950.

$$xf(x) + f'(x) \equiv e^{-x^2/2}\mathrm{D}\,\{\, e^{x^2/2}f(x)\,\}\,, \tag{3}$$

la (1) resta provata per $n = 1$, e si è trovato $a_{1,0} = A_{1,0}$, $a_{1,1} = A_{1,1}$.

Suppongo ora che la (1) valga per un certo numero naturale n e provo che la (1) vale allora anche per il numero naturale $n + 1$, ossia è

$$\sum_{r=0}^{n+1} \frac{1}{r!} P_{n+1}^{(r)}(x) f^{(r)}(x) \equiv e^{-x^2/2} \sum_{r=0}^{n+1} a_{n+1,r}\, \mathrm{D}^r \{\, e^{x^2/2} f(x)\,\}\,. \tag{4}$$

Invero, qui il secondo membro si può spezzare così:

$$a_{n+1,0}f(x) + e^{-x^2/2}\mathrm{D} \sum_{r=0}^{n} a_{n+1,\,r+1}\mathrm{D}^r \{\, e^{x^2/2}f(x)\,\} \equiv$$

$$\equiv a_{n+1,0}f(x) + \underline{e^{-x^2/2}\mathrm{D}e^{x^2/2}} \cdot \Big[e^{-x^2/2} \sum_{r=0}^{n} a_{n+1,\,r+1}\mathrm{D}^r \{\, e^{x^2/2}f(x)\,\}\Big]\,,$$

e poichè la (1) è supposta vera per l'intero n considerato, esiste un polinomio $\overline{P}_n(x)$, di grado n, tale che l'ultima espressione precedente si possa scrivere

$$a_{n+1,0}f(x) + \underline{e^{-x^2/2}\mathrm{D}e^{x^2/2}} \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!}\, \overline{P}_n^{(r)}(x) f^{(r)}(x)\,,$$

ed essendo

$$e^{-x^2/2}\mathrm{D}\,\{\, e^{x^2/2}\overline{P}_n^{(r)}(x) f^{(r)}(x)\,\} = x\overline{P}_n^{(r)}(x)f^{(r)}(x) + \overline{P}_n^{(r+1)}(x)f^{(r)}(x) + \overline{P}_n^{(r)}(x)f^{(r+1)}(x)\,,$$

si trova che il secondo membro di (4), ordinato secondo le derivate di ordini crescenti di $f(x)$, è uguale a

$$\sum_{r=0}^{n+1} \frac{1}{r!} \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}x^r} \{\, a_{n+1,0} + x\overline{P}_n(x) + \overline{P}_n'(x)\,\} \cdot f^{(r)}(x)\,,$$

dove la quantità fra graffe è proprio un polinomio $P_{n+1}(x)$ di grado $n + 1$. Così la (4) è conclusa, e la (1) resta stabilita.

2. - **Osservazioni.**

I coefficienti $a_{n,0}$, $a_{n,1}$, ..., $a_{n,n}$ della formula (1) risultano determinati univocamente dalla (1) stessa e si determineranno, nei vari casi particolari, seguendo il metodo dei coefficienti indeterminati. Si può dare un'espressione generale di questi coefficienti $a_{n,r}$ a mezzo dei coefficienti del polinomio $P_n(x)$, ma su ciò e su altre formule, in legame principalmente con i polinomi di HERMITE, mi propongo di tornare in altro lavoro.

Dalla precedente (3) risulta la seguente eguaglianza fra operatori

$$\underline{e^{-x^2/2}\mathrm{D}e^{x^2/2}} = x + \mathrm{D}\,, \tag{5}$$

dove la sottolineatura è messa affinchè si interpreti il primo membro in senso operatorio (l'operazione si compone delle seguenti operazioni parziali successive: moltiplicazione per $e^{x^2/2}$, derivazione rispetto ad x, moltiplicazione per $e^{-x^2/2}$). In virtù di (5) la formula (1) si può scrivere nella forma

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!} \mathrm{D}^r P_n(x) \cdot \mathrm{D}^r f(x) \equiv \sum_{r=0}^{n} a_{n,r} \cdot \left(\underline{x + \mathrm{D}}\right)^r f(x) , \tag{1'}$$

dove $\left(\underline{x + \mathrm{D}}\right)^r$ è la potenza r-esima di iterazione dell'operazione $x + \mathrm{D}$.

3. - Risoluzione dell'equazione differenziale (2).

L'equazione differenziale (2) equivale, applicando la formula (1), alla seguente

$$\sum_{r=0}^{n} a_{n,r} \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}x^r} (e^{x^2/2} y) = 0 , \tag{2'}$$

dove le costanti $a_{n,r}$ si determineranno, come è detto al n. 2, applicando il metodo dei coefficienti indeterminati. Questa equazione nella funzione incognita $Y = e^{x^2/2} y$ è lineare e a coefficienti costanti, e se l'integrale generale è

$$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \dots + c_n Y_n ,$$

con $c_1, c_2, \dots, c_n$ costanti arbitrarie, l'integrale generale di (2) è allora

$$y = (c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \dots + c_n Y_n) e^{-x^2/2} .$$