JAURÈS CECCONI (*)

Proprietà integrali delle trasformazioni piane. (**)

1. - Introduzione.

In una Nota dal titolo « Sur les fonctions continues à un nombre derivé sommable » S. SAKS [7] ha dimostrato il seguente

Teorema *a*). Se $\lambda(x)$ è un numero derivato di una funzione $f(x)$ continua in $I \equiv (a, b)$, si ha

$$| f(b) - f(a) | \leqslant \int_a^b | \lambda(x) | \, dx + m(I) ,$$

essendo $m(I)$ il confine superiore dei numeri $| f[P] |$ (1), ove P è un insieme perfetto di misura nulla, contenuto in (a, b), e per il resto qualunque.

Da questo teorema e da note proprietà delle funzioni continue a variazione limitata ed assolutamente continue si deducono in modo evidente le seguenti proposizioni:

Teorema *b*). Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $f(x)$ continua in (a, b) sia ivi a variazione limitata è che un suo numero derivato $\lambda(x)$ sia integrabile in (a, b) e che esista un $M > 0$ tale che per ogni insieme perfetto P, di punti di (a, b), di misura nulla, e per ogni gruppo finito di intervalli di (a, b), $I_1, I_2, \ldots, I_n$, senza punti interni in comune, si abbia

$$\sum_{i=1}^{n} | f[P \cdot I_i] | < M .$$

Teorema *c*). Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione $f(x)$ continua in (a, b) sia ivi assolutamente continua, è che un suo numero

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Pisa (Italia).

(**) Lavoro ricevuto il 10-XII-1949.

(1) Se G è un insieme di (a, b), $f[G]$ è l'immagine di G secondo $f(x)$.

derivato sia integrabile in (a, b) e che per ogni insieme perfetto P di punti di (a, b), di misura nulla, si abbia

$$|f[P]| = 0 .$$

Teorema d). Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione $f(x)$ continua in (a, b) ed ivi a variazione limitata sia assolutamente continua in (a, b), è che per ogni insieme perfetto P di (a, b) di misura nulla si abbia

$$|f[P]| = 0 .$$

Successivamente S. SAKS dimostrò la seguente proposizione, dello stesso tipo della a), relativa a trasformazioni continue di un cubo dello S_n:

Teorema a'). Se $T = T(P)$ è una trasformazione continua di un cubo C di S_n in un insieme $\overline{C}$, si ha

$$|T[C]| \leqslant \int_C J(P)\, dP + m(C) ,$$

$m(C)$ avendo un significato analogo a quello di $m(I)$ nell'enunciato del teorema a) ed essendo $J(P)$ lo jacobiano inferiore, secondo BANACH [1], della trasformazione $T = T(P)$.

Dal teorema a') S. SAKS deduce le analoghe delle proposizioni b), c), d) per trasformazioni a variazione limitata ed assolutamente continue secondo BANACH.

In questi ultimi anni accanto ai concetti di variazione limitata e di assoluta continuità secondo BANACH sono stati introdotti contemporaneamente ed indipendentemente, da L. CESARI [3] e da T. RADÓ e P. V. REICHELDERFER [6] nuovi concetti di trasformazione piana a variazione limitata ed assolutamente continua che nel seguito saranno indicati rispettivamente con B.V. ed A.C..

Ed è mediante questi concetti che L. CESARI [2] ha potuto caratterizzare rispettivamente le superficie di area finita secondo LEBESGUE e quelle la cui area, supposta finita, è espressa dall'integrale classico.

In questa Nota mi propongo di dare un teorema del tipo del teorema a), dal quale poter dedurre le analoghe delle proposizioni b), c), d) per trasformazioni piane B.V. ed A.C..

2. – Enunciato della proposizione principale.

Siano $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ due funzioni continue nel quadrato Q del piano uv, sia T la trasformazione piana continua

$$(1) \qquad T: \quad x = x(u, v) , \quad y = y(u, v) , \quad (u, v) \in Q .$$

In una Nota di T. RADÓ [5] sono stati riesposti, ed in parte confrontati, i principali elementi delle teorie sviluppate da L. CESARI, T. RADÓ e P. V. REICHELDERFER intorno ai concetti B.V. ed A.C..

È a questa Nota che mi riferisco per la comprensione di ogni notazione. Faccio perciò uso delle variabili complesse $z = x + iy$, $w = u + iv$ e riscrivo T nella seguente forma

$$(2) \qquad T: \qquad z = t(w)\,, \qquad w \in Q\,.$$

Sia p un poligono semplice di Q. Oltre alle funzioni considerate nella Nota sopra citata [5] considero la funzione di poligono $u(p)$, introdotta da L. CESARI [3], così definita

$$u(p) = \iint o(z, T, p)\, dx\, dy\,,$$

e le funzioni

$$c_k(z, T, p) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad k(z, T, p) \neq 0\,, \\ 0 & \text{se} \quad k(z, T, p) = 0\,, \end{cases}$$

$$G_k(p) = \iint c_k(z, T, p)\, dx\, dy$$

introdotte da T. RADÓ e P. V. REICHELDERFER [6].

Sia w un punto interno a Q, sia q un quadrato appartenente a Q, con i lati paralleli agli assi u e v e contenente w nel suo interno, sia $\delta(q)$ il diametro di q. Considero i limiti di indeterminazione del rapporto $\dfrac{G_k(q)}{|q|}$ al tendere di $\delta(q)$ allo zero:

$$\underline{D}_k(w) = \varliminf_{\delta(q) \to 0} \frac{G_k(q)}{|q|}\,, \qquad \overline{D}_k(w) = \varlimsup_{\delta(q) \to 0} \frac{G_k(q)}{|q|}\,.$$

Le funzioni $\underline{D}_k(w)$, $\overline{D}_k(w)$ sono misurabili [9]. T. RADÓ e P. V. REICHELDERFER [6] hanno dimostrato che se T è B.V. si ha, quasi ovunque in Q,

$$\underline{D}_k(w) = \overline{D}_k(w) = J(w)\,,$$

ove $J(w)$ è lo Jacobiano generalizzato assoluto della trasformazione T.

Esiste perciò finito od infinito l'integrale $\iint_p \underline{D}_k(w)\, du\, dv$.

Posso allora enunciare il

Teorema I. *Se T è la trasformazione piana definita dalle* (1) *e p è un* *poligono appartenente a Q, si ha*

$$G_k(p) \leqslant \iint_p \underline{D}_k(w)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + m(p)\ ,$$

essendo $m(p)$ il confine superiore dei numeri $|T[P \cdot E(T, p)]|$ ove P è un insieme perfetto di punti di p di misura nulla ed $E(T, p)$ è l'insieme dei punti di p che appartengono agli e.m.m.c. associati con T in p.

Questo teorema estende la proposizione *a*) alle trasformazioni piane in modo da poterne dedurre le analoghe delle proposizioni *b*), *c*), *d*) relativamente ai concetti B.V. ed A.C..

3. – Dimostrazione del Teorema I.

Se $\iint_p \underline{D}_k(w)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = +\infty$ non c'è niente da dimostrare. Suppongo allora che $\iint_p \underline{D}_k(w)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ sia finito. Sia w un punto interno a p, sia q un quadrato con i lati paralleli agli assi u, v; contenuto in p; contenente w nel suo interno e sia δq il diametro di q. Esiste perciò quasi dappertutto in p il limite

$$\lim_{\delta(q)\to 0} \frac{\iint_q \underline{D}_k(w)\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{|q|} = \underline{D}_k(w)\,.$$

Dalla definizione di $\underline{D}_k(w)$ segue allora che, comunque si fissi un $\varepsilon > 0$, per quasi ogni punto w di p esiste una successione di quadrati interni a p, contenenti w nel loro interno, il cui diametro tende a zero, tali che per ogni quadrato q della successione si abbia

$$\frac{u(q)}{|q|} < \underline{D}_k(w) + \frac{\varepsilon}{3\,|p|}\,, \qquad \frac{\iint_q \underline{D}_k(w)\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{|q|} > \underline{D}_k(w) - \frac{\varepsilon}{3\,|p|}\,.$$

Per il teorema di copertura di VITALI esiste perciò una successione finita od infinita di quadrati q_i, interni a p, e di punti w_i, tali che i quadrati q_i siano a due a due privi di punti interni in comune ed inoltre si abbia

$$w_i \in q_i\,, \qquad \frac{u(q_i)}{|q_i|} < \underline{D}_k(w_i) + \frac{\varepsilon}{3\,|p|}\,, \qquad \frac{\iint_{q_i} \underline{D}_k(w)\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{|q_i|} > \underline{D}_k(w_i) - \frac{\varepsilon}{3\,|p|}\,,$$

$$R_n = p - \sum_{i=1}^{n} q_i^0\,, \qquad R = \lim_{n\to\infty} R_n\,, \qquad |R| = 0\,.$$

Per ogni intero n considero l'insieme U così definito

$$z \in U_n \quad \text{se} \quad a)\ c_k(z, T, p) \neq 0\,, \qquad b)\ \sum_{i=1}^{n} c_k(z, T, q_i) = 0\,.$$

È evidentemente $U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_n \supset \ldots$, esiste perciò l'insieme $U = \lim_{n\to\infty} U_n$.

Voglio dimostrare che si ha $U \subset T\,[R \cdot E(T, p)]$. Sia infatti $z \in U$. Considerato l'insieme, non vuoto, $\sum \gamma(z)$ degli e.m.m.c. di z secondo T in p, e preso uno di questi e.m.m.c., sia $\gamma(z)$, faccio vedere che per ogni n è non vuoto l'insieme $R_n \cdot \gamma(z)$. Se, infatti, fosse vuoto l'insieme $R_n \cdot \gamma(z)$ si avrebbe, per ogni valore dell'indice i $(i \leqslant n)$,

$a)$ $\gamma(z) \subset q_i^\circ$,

$b)$ se G è un insieme aperto tale che $\gamma(z) \subset G$ esiste una regione indicatrice $\mathcal{R}$ per z tale che $\gamma(z) \subset \mathcal{R} \subset G \cdot q_i^\circ$.

Si avrebbe perciò, per un valore di i, $c_k(z, T, q_i) \neq 0$ e quindi $\sum_{i=1}^{n} c_k(z, T, q_i) \neq 0$ contrariamente all'avere supposto $z \in U$ e quindi $z \in U_n$ per ogni valore di n.

Risulta perciò, per ogni n, non vuoto l'insieme chiuso $R_n \cdot \gamma(z)$ e poichè si ha

$$R_1 \cdot \gamma(z) \supset R_2 \cdot \gamma(z) \supset \ldots \supset R_n \cdot \gamma(z) \supset \ldots\,,$$

se ne deduce che è non vuoto l'insieme $R \cdot \gamma(z) = \lim_{n\to\infty} R_n \cdot \gamma(z)$, e quindi l'insieme $R \cdot \sum \gamma(z)$.

Ne risulta perciò $z \equiv T[R \cdot \sum \gamma(z)] \subset T[R \cdot E(T, p)]$ e di conseguenza

$$U \subset T[R \cdot E(T, p)]\,.$$

Ne segue allora, in virtù della misurabilità degli insiemi U_n, $E(T, p)$, $T[R \cdot E(T, p)]$, e del fatto che $|\, U_1 \,| \neq +\infty$,

$$\lim_{n\to\infty} |\, U_n \,| = |\, U \,| \leqslant |\, T[R \cdot E(T, p)] \,| = |\, T[P \cdot E(T, p)] \,|\,,$$

essendo P un insieme perfetto di punti di p che differisce da R per un insieme numerabile di punti w.

Per il significato di $m(p)$, ne viene che

$$\lim_{n\to\infty} |\, U_n \,| \leqslant m(p)\,,$$

e che in base all'$\varepsilon > 0$ sopra fissato, si può determinare un intero $n_0(\varepsilon)$ tale che se $n > n_0(\varepsilon)$ si abbia

$$|\, U_n \,| < m(p) + \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Sia $c(z, T, p, U_n)$ la funzione caratteristica dell'insieme U_n. Dalla definizione di U_n si ha, per ogni z ed n,

$$c_k(z, T, p) \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_k(z, T, q_i) + c(z, T, p, U_n)$$

e mediante integrazione

$$G_k(p) \leqslant \sum_{i=1}^{n} G_k(q_i) + | U_n | .$$

Sarà allora, per ogni $n > n_0(\varepsilon)$,

$$G_k(p) \leqslant \sum_{i=1}^{n} G_k(q_i) + m(p) + \frac{\varepsilon}{3}$$

e, in virtù delle ipotesi fatte sui quadrati q_i,

$$G_k(p) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left[\underline{D}_k(w_i) \mid q_i \mid + \frac{\varepsilon \mid q_i \mid}{3 \mid p \mid} \right] + m(p) + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \underline{D}_k(w_i) \mid q_i \mid + m(p) + \frac{2\varepsilon}{3} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left[\iint_{q_i} \underline{D}_k(w) \, du \, dv + \frac{\varepsilon \mid q_i \mid}{3 \mid p \mid} \right] + m(p) + \frac{2\varepsilon}{3} \leqslant \iint_{\sum_{i=1}^{n} q_i} \underline{D}_k(w) \, du \, dv + m(p) + \varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant \iint_{p} \underline{D}_k(w) \, du \, dv + m(p) + \varepsilon ,$$

dalla quale, per l'arbitrarietà di ε, risulta l'asserto.

4. – **Conseguenze.**

Sono ora in grado di dare gli analoghi dei teoremi *b*), *c*), *d*) per trasformazioni piane B.V. ed A.C..

Allo scopo comincio col ricordare il seguente teorema di L. CESARI che esprime una proprietà della funzione $u(p)$:

Teorema [4]. Se p è un poligono semplice di Q e se σ_r è una generica notazione per indicare un gruppo di poligoni $q_1, q_2, \ldots, q_n$ semplici di p, a due a due privi di punti interni in comune, e se si pone

$$U(p) = \operatorname*{extr\,sup}_{\sigma_r} \sum_{i=1}^{n} u(q_i) ,$$

si ha

$$U(p) = G(p) = W(p) ,$$

ove $G(p) = W(p)$ è la variazione totale, finita od infinita, della trasformazione T in p.

Osservo poi che dalle definizioni delle funzioni $o(z, T, p)$, $c_k(z, T, p)$, $k(z, T, p)$ risulta, per ogni poligono p di Q,

$$o(z, T, p) \leqslant c_k(z, T, p) \leqslant k(z, T, p) ,$$

e che, per note proprietà della funzione $k(z, T, p)$ [5], si ha, per ogni gruppo di poligoni $q_1, q_2, \ldots, q_n$, di p, privi a due a due di punti interni in comune,

$$\sum_{i=1}^{n} k(z, T, q_i) \leqslant k(z, T, p) .$$

Da queste si deduce allora, mediante integrazione,

$$\sum_{i=1}^{n} u(q_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} G_k(q_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} G(q_i) \leqslant G(p) .$$

Quanto sopra dimostra il seguente

Teorema II. *Se p è un poligono semplice di Q e se σ_r, $q_1, q_2, \ldots, q_n$ hanno il significato dell'enunciato precedente, si ha*

$$G(p) = W(p) = \operatorname{extr\,sup}_{\sigma_r} \sum_{i=1}^{n} G_k(q_i) .$$

Da questo teorema discende evidentemente il seguente corollario:

Teorema III. *Condizione necessaria e sufficiente perchè T sia B.V. in Q è che esista una costante $M > 0$, tale che per ogni gruppo di poligoni di Q, $q_1, q_2, \ldots, q_n$, privi a due a due di punti interni in comune, si abbia*

$$\sum_{i=1}^{n} G_k(q_i) < M .$$

Ecco ora l'estensione della proposizione b) alle trasformazioni piane B.V.:

Teorema IV. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè T sia B.V. è che il numero derivato inferiore $\underline{D}_k(w)$ sia integrabile in Q e che esista una costante $M > 0$ tale che per ogni insieme perfetto P di Q di misura nulla e per ogni gruppo di poligoni semplici di Q, $p_1, p_2, \ldots, p_n$, privi a due a due di punti interni in comune, si abbia*

$$\sum_{i=1}^{n} | T[P \cdot E(T \cdot p_i)] | < M .$$

La condizione è sufficiente in virtù del teorema III. Essa è anche necessaria. Infatti, se T è B.V. quasi dappertutto in Q esiste finito il suo Jacobiano generalizzato assoluto ed è, con ogni evidenza,

$$\underline{D}_k(w) \leqslant J(w)$$

quasi dappertutto in Q, ciò che implica, per la integrabilità in Q di $J(w)$, la integrabilità di $\underline{D}_k(w)$. È inoltre

$$G_k(p_i) \leqslant | T[p_i \cdot E(T, p_i)] |$$

e quindi

$$m(p_i) \leqslant G_k(p_i) ,$$

per il teorema III esiste allora un $M > 0$ con la proprietà dell'enunciato.

Il teorema seguente è l'estensione della proposizione c).

Teorema V. *Condizione necessaria e sufficiente perchè T sia A.C. è che il numero derivato inferiore $\underline{D}_k(w)$ sia integrabile in Q e che per ogni insieme perfetto P di Q, di misura nulla, si abbia*

$$| T[P \cdot E(T, Q)] | = 0 .$$

La condizione è sufficiente. Infatti, preso comunque in Q un gruppo p_1, $p_1, \dots, p_n$ di poligoni semplici, privi a due a due di punti interni in comune, per essere

$$E(T, p_i) \subset E(T, Q) , \qquad i = 1, 2, \dots n,$$

e per il teorema I si ha

$$\sum_{i=1}^{n} G_k(p_i) \leqslant \iint_Q \underline{D}_k(w)\, du\, dv \leqslant \iint_Q J(w)\, du\, dv ,$$

dalla quale mediante il teorema II si deduce

$$G(Q) \leqslant \iint_Q J(w)\, du\, dv ,$$

e quest'ultima esprime che T è A.C..

La condizione è necessaria. Ciò segue, per la integrabilità di $\underline{D}_k(w)$, dal ragionamento precedente. Che poi sia $| T[P \cdot E(T, Q)] | = 0$ risulta da note proprietà delle trasformazioni piane A.C. [6].

Dal teorema precedente si deduce in particolare:

Teorema VI. *Condizione necessaria e sufficiente perchè T, B.V. in Q, sia A.C. è che per ogni insieme perfetto P di Q, di misura nulla, si abbia*

$$| T[P \cdot E(T, Q)] | = 0 .$$

Bibliografia.

[1] S. BANACH, *Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie*. Fund. Math. **7**, 225-236 (1925).

[2] L. CESARI, *Caratterizzazione analitica delle superficie continue di area finita secondo Lebesgue*. Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) **10**, 253-294 (1941).

[3] L. CESARI, *Sui fondamenti geometrici dell'integrale classico per l'area delle superficie in forma parametrica*. Mem. Accad. Italia **13**, 1323-1481 (1943).

[4] L. CESARI, *Una proprietà caratteristica delle trasformazioni a variazione limitata*. Boll. Un. Mat. Ital. (2) **4**, 224-235 (1942).

[5] T. RADÓ, *Two-dimensional concepts of bounded variation and absolute continuity*. Duke Math. J. **14**, 587-608 (1947).

[6] T. RADÓ and P. V. REICHELDERFER, *A theory of absolutely continuous transformations in the plane*. Trans. Amer. Math. Soc. **49**, 258-307 (1941).

[7] S. SAKS, *Sur les fonctions continues à un nombre derivé sommable*. Fund. Math. **8**, 290-295 (1925).

[8] S. SAKS, *Sur une certaine classe des fonctions d'ensemble*. Bull. Acad. Pol., 103-108 (1926).

[9] S. SAKS, *Theory of integral*. Monografie Matematyczne, T. VII (1937).