Giovanni Aquaro (*)

Un teorema di media per le equazioni dell'Elasticità. (**)

Introduzione. Il teorema della media di Gauss, come è ben noto, assegna ad una funzione armonica in un dominio sferico, quale valore nel centro, la media dei valori che essa assume sulla frontiera.

Questa proposizione, che esprime una proprietà caratteristica delle funzioni armoniche, permette di stabilire un ragguardevole numero di risultati ormai classici nella teoria delle dette funzioni.

Il prof. Picone mi ha espressa la convinzione che un teorema analogo a quello di Gauss possa stabilirsi per le soluzioni delle equazioni della Elasticità.

Nella presente Nota si indica appunto, per le soluzioni di tali equazioni, un teorema di media che, in un lavoro in corso di preparazione, viene dimostrato essere caratteristico per queste soluzioni.

1. – Indichiamo con Σ un dominio sferico di raggio R e di centro nel punto P_0 dello spazio.

Dicendo che $\mathbf{s}(P)$ è un *vettore elastico* in Σ intenderemo che le sue componenti sono funzioni di P, regolari in detto dominio e che, nei punti interni ad esso, risulta:

$$k \operatorname{grad}_P \operatorname{div}_P \mathbf{s}(P) - \operatorname{rot}_P \operatorname{rot}_P \mathbf{s}(P) = 0\,, \tag{1}$$

dove gli operatori grad, div e rot sono affetti dell'indice P per ricordare che essi agiscono sulle coordinate del punto P, ed è $k > \frac{4}{3}$.

Posto $\lambda = k - 1$, ricordiamo che la (1) può sostituirsi con

$$\Delta_2 \mathbf{s}(P) + \lambda \operatorname{grad}_P \operatorname{div}_P \mathbf{s}(P) = 0\,, \tag{2}$$

(*) Indirizzo: Istituto Naz. per le Applicazioni del Calcolo; Piazzale delle Scienze, 7 - Roma (Italia).

(**) Lavoro eseguito nello « Istituto Naz. per le Applicazioni del Calcolo ». Ricevuto il 7-VI-1950.

essendo $\Delta_2 \boldsymbol{s}(P)$ il vettore che ha come componenti le omonime componenti di $\boldsymbol{s}(P)$ alle quali si sia applicato l'operatore di LAPLACE, rispetto alle coordinate di P.

Poichè per ogni vettore elastico $\boldsymbol{s}(P)$ la funzione $\mathrm{div}_P\, \boldsymbol{s}(P) = \Theta(P)$ risulta armonica (1), la (2) implica, con facili calcoli, che all'interno di Σ deve risultare

$$\Delta_2 \left[\boldsymbol{s}(P) + \frac{\lambda}{2} (P - P_0)\Theta(P) \right] = 0 . \tag{3}$$

Conseguentemente, se $\boldsymbol{s}(P)$ è elastico in Σ all'interno di tale dominio esiste

---

(1) Una dimostrazione di questo fatto, basata solo su alcune semplici proprietà integrali dei vettori elastici, può essere dedotta da una mia Nota dal titolo *Sul calcolo delle deformazioni di uno strato sferico elastico*, in corso di pubblicazione nei « Rend. Acc. Naz. dei Lincei ». Il ragionamento che si segue, nelle sue grandi linee, è il seguente. Scritta la (1) in coordinate polari con polo in un punto P' interno a Σ, se ne considera la componente secondo il raggio vettore e la si integra sulla frontiera del dominio sferico Σ'_ϱ di centro P' e raggio ρ, interna a Σ.

Detto $\boldsymbol{\upsilon}(Q)$ il versore della normale interna ad $\mathrm{F}\Sigma'_\varrho$ nel suo punto Q, indicato con $\mathrm{dF}\Sigma_\varrho(Q)$ l'elemento superficiale di $\mathrm{F}\Sigma'_\varrho$, e posto

$$u(\rho) = -\int_{\mathrm{F}\Sigma'_\varrho} \boldsymbol{s}(Q) \times \boldsymbol{\upsilon}(Q)\, \mathrm{dF}\,\Sigma'_\varrho(Q) , \tag{a}$$

con facili calcoli [cfr. le formule (10), (11) e (12) della Nota citata] si trova:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} \left[\frac{1}{\rho^2} \frac{\mathrm{d}u(\rho)}{\mathrm{d}\rho} \right] = 0 .$$

Se ne deduce

$$u(\rho) = \frac{1}{3} \alpha \rho^3 + \beta ,$$

con α e β costanti di integrazione. Ma per $\rho \to 0$ la $u(\rho)$ tende a zero e per ciò deve essere $\beta = 0$. Richiamata la (a) e applicando al suo secondo membro il teorema della divergenza, consegue:

$$\int_{\Sigma'_\varrho} \mathrm{div}_P\, \boldsymbol{s}(P)\, \mathrm{d}T(P) = \frac{1}{3} \alpha \rho^3$$

e, dividendone ambo i membri per mis $\Sigma'_\varrho = \frac{4}{3}\pi\rho^3$, per $\rho \to 0$ si trova:

$$\alpha = 4\pi\, \mathrm{div}_P\, \boldsymbol{s}(P') ,$$

e quindi $\Theta(P) = \mathrm{div}_P\, \boldsymbol{s}(P)$ è armonica.

un vettore $\boldsymbol{\tau}(P)$ armonico (le cui componenti, cioè, sono funzioni armoniche) tale che sia:

$$\mathbf{s}(P) = \boldsymbol{\tau}(P) - \frac{\lambda}{2}(P - P_0)\Theta(P). \tag{4}$$

Indichiamo ora con Σ_ϱ un dominio sferico di raggio $\rho < R$ e centro P_0, cioè concentrico a Σ e ad esso interno con la sua frontiera.

Detta $\overline{P_0P}$ la distanza di P da P_0, è facile convincersi che *quando P varia in Σ_ϱ ogni vettore $\mathbf{s}(P)$ elastico in Σ può essere decomposto con la seguente formula*:

$$\mathbf{s}(P) = \boldsymbol{\sigma}(P) + (\rho^2 - \overline{P_0P}^2)\,\mathrm{grad}_P\,\varphi(P)\,, \tag{5}$$

in cui $\varphi(P)$ e le componenti del vettore $\boldsymbol{\sigma}(P)$ sono funzioni regolari ed armoniche in Σ_ϱ.

Infatti in Σ_ϱ la funzione $\Theta(P)$ è regolare ed armonica, onde può essere rappresentata mediante la formula di Poisson e si può scrivere:

$$\Theta(P) = \frac{1}{4\pi\rho}\int_{F\Sigma_\varrho}\Theta(Q)\,\frac{\rho^2 - \overline{P_0P}^2}{\overline{QP}^3}\,dF\,\Sigma_\varrho(Q)\,,$$

dove Q varia sulla frontiera $F\Sigma_\varrho$ del dominio Σ_ϱ e $dF\,\Sigma_\varrho(Q)$ indica l'elemento superficiale di tale frontiera.

Consegue:

$$(P - P_0)\Theta(P) = \frac{1}{4\pi\rho}\int_{F\Sigma_\varrho}\Theta(Q)\,\frac{\rho^2 - \overline{P_0P}^2}{\overline{QP}^3}\,(P - P_0)\,dF\,\Sigma_\varrho(Q) =$$

$$= \frac{\rho^2 - \overline{P_0P}^2}{4\pi\rho}\int_{F\Sigma_\varrho}\Theta(Q)\,\frac{P - Q}{\overline{QP}^3}\,dF\,\Sigma_\varrho(Q) + \frac{1}{4\pi\rho}\int_{F\Sigma_\varrho}\Theta(Q)(Q - P_0)\,\frac{\rho^2 - \overline{P_0P}^2}{\overline{QP}^3}\,dF\,\Sigma_\varrho(Q)\ ;$$

ed ove si ponga:

$$\psi(P) = -\frac{1}{4\pi\rho}\int_{F\Sigma_\varrho}\Theta(P)\,\frac{1}{\overline{QP}}\,dF\,\Sigma_\varrho(Q)\,,$$

$$\boldsymbol{\tau}'(P) = \frac{1}{4\pi\rho}\int_{F\Sigma_\varrho}\Theta(Q)(Q - P_0)\,\frac{\rho^2 - \overline{P_0P}^2}{\overline{QP}^3}\,dF\,\Sigma_\varrho(Q)\,,$$

si conclude:

$$(P - P_0)\Theta(P) = \boldsymbol{\tau}'(P) + (\rho^2 - \overline{P_0P}^2)\,\mathrm{grad}_P\,\psi(P)\,, \tag{6}$$

essendo $\psi(P)$ e le componenti di $\boldsymbol{\tau}'(P)$ funzioni armoniche e regolari in Σ_ϱ. L'ultima relazione associata alla (4) fornisce la (5), appena si sia posto:

$$\boldsymbol{\sigma}(P) = \boldsymbol{\tau}(P) - \frac{\lambda}{2}\,\boldsymbol{\tau}'(P)\,,$$

$$\varphi(P) = -\frac{\lambda}{2}\,\psi(P)\,.$$

Poichè $\varphi(P)$ e le componenti di $\boldsymbol{\sigma}(P)$ risultano regolari ed armoniche in Σ_ϱ, la proposizione enunciata è completamente dimostrata.

2. – Ormai siamo in grado di stabilire il preannunciato teorema di media. Fissato un valore di $\rho < R$, nei punti del corrispondente Σ_ϱ adottiamo per il vettore $\boldsymbol{s}(P)$ elastico in Σ, la rappresentazione (5), cioè poniamo

$$\boldsymbol{s}(P) = \boldsymbol{\sigma}(P) + (\rho^2 - \overline{P_0P}^2)\,\mathrm{grad}_P\,\varphi(P)\,.$$

Per $P \to Q$ e $Q \in \mathrm{F}\Sigma_\varrho$ risulta

$$\boldsymbol{s}(Q) = \boldsymbol{\sigma}(Q)\,,$$

e quindi il vettore $\boldsymbol{\sigma}(Q)$ è univocamente determinato all'interno di Σ_ϱ dalla formula di POISSON

$$\boldsymbol{\sigma}(P) = \frac{1}{2\pi\rho}\int_{\mathrm{F}\Sigma_\varrho} \boldsymbol{s}(Q)\,\frac{\rho^2 - \overline{P_0P}^2}{\overline{QP}^3}\,\mathrm{dF}\,\Sigma_\varrho(Q)\,. \tag{7}$$

Inoltre un facile calcolo (³) mostra che è

$$\begin{aligned}\mathrm{div}_P\,\boldsymbol{s}(P) &= \mathrm{div}_P\,\boldsymbol{\sigma}(P) + \mathrm{div}_P\,[(\rho^2 - \overline{P_0P}^2)\,\mathrm{grad}_P\,\varphi(P)] = \\ &= \mathrm{div}_P\,\boldsymbol{\sigma}(P) - 2(P - P_0)\times \mathrm{grad}_P\,\varphi(P).\end{aligned}$$

Se si pone $r = \overline{P_0P}$ e si denota con $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}$ la operazione di derivazione nella direzione orientata di $P - P_0$, consegue:

$$\mathrm{grad}_P\,\mathrm{div}_P\,\boldsymbol{s}(P) = \mathrm{grad}_P\,\mathrm{div}_P\,\boldsymbol{s}(P) - 2\,\mathrm{grad}_P\,\varphi(P) - 2r\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{grad}_P\,\varphi(P)\,. \tag{8}$$

Un altro breve calcolo fornisce:

$$\Delta_2[(\rho^2 - \overline{P_0P}^2)\,\mathrm{grad}_P\,\varphi(P)] = -6\,\mathrm{grad}_P\,\varphi(P) - 4r\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{grad}_P\,\varphi(P)\,. \tag{9}$$

(³) Cfr. R. MARCOLONGO, *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici*, Hoepli, Milano 1904 (pag. 285); oppure P. BURGATTI, *Teoria matematica della elasticità*, Zanichelli, Bologna 1931 (pag. 216).

A causa della (2) le eguaglianze (8) e (9) ci permettono di scrivere

$$\lambda\, \mathrm{grad}_P\, \mathrm{div}_P\, \boldsymbol{\sigma}(P) = 2(\lambda + 3)\, \mathrm{grad}_P\, \varphi(P) + 2(\lambda + 2) r \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\, \mathrm{grad}_P\, \varphi(P)\,,$$

onde per $P \equiv P_0$, cioè per $r = 0$, si trova, se si ricorda che è $\lambda = k - 1 > \frac{1}{3}$,

$$[\mathrm{grad}_P\, \varphi(P)]_{P=P_0} = \frac{\lambda}{2(\lambda+3)} [\mathrm{grad}_P\, \mathrm{div}_P\, \boldsymbol{\sigma}(P)]_{P=P_0}\,.$$

Posto allora $P \equiv P_0$ nella (5) e ricordato che è $\rho = \overline{QP_0}$, l'ultima relazione, nonchè la (7), forniscono:

$$\mathbf{s}(P_0) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{\mathrm{F}\Sigma_\varrho} \mathbf{s}(Q)\, \mathrm{dF}\, \Sigma_\varrho(Q) + \frac{\rho^2\lambda}{2(\lambda+3)} [\mathrm{grad}_P\, \mathrm{div}_P\, \boldsymbol{\sigma}(P)]_{P=P_0}\,. \tag{10}$$

Dette $s_1(Q)$, $s_2(Q)$, $s_3(Q)$ le componenti di $\mathbf{s}(Q)$ e x_1, x_2, x_3 le coordinate di P, a causa della (7), risulta:

$$\mathrm{div}_P\, \boldsymbol{\sigma}(P) = \mathrm{div}_P \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\mathrm{F}\Sigma_\varrho} \mathbf{s}(Q) \frac{\rho^2 - \overline{P_0P}^2}{\overline{QP}^3}\, \mathrm{dF}\, \Sigma_\varrho(Q) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\mathrm{F}\Sigma_\varrho} \sum_{j=1}^{3} s_j(Q) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\rho^2 - \overline{P_0P}^2}{\overline{QP}^3} \right) \mathrm{dF}\, \Sigma_\varrho(Q)\,,$$

onde consegue

$$\mathrm{grad}_P\, \mathrm{div}_P\, \boldsymbol{\sigma}(P) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\mathrm{F}\Sigma_\varrho} \sum_{j=1}^{3} s_j(Q) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathrm{grad}_P \frac{\rho^2 - \overline{P_0P}^2}{\overline{QP}^3} \right) \mathrm{dF}\, \Sigma_\varrho(Q)\,.$$

Poichè le componenti di $\mathbf{s}(P)$ sono regolari in Σ l'ultima relazione consente di scrivere, passando al limite per $\rho \to R$ nella (10),

$$\mathbf{s}(P_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \Bigg[\int_{\mathrm{F}\Sigma} \mathbf{s}(Q)\, \mathrm{dF}\, \Sigma(Q) + \tag{11}$$

$$+ \frac{R^3\lambda}{2(\lambda+3)} \int_{\mathrm{F}\Sigma} \sum_{j=1}^{3} s_j(Q) \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathrm{grad}_P \frac{R^2 - \overline{P_0P}^2}{\overline{PQ}^3} \right) \right]_{P=P_0} \mathrm{dF}\, \Sigma(Q)$$

Indicando con $\delta_{i,j}$ il simbolo di KRONECKER definito da

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad i = j \\ 0 & \text{per} \quad i \neq j\,, \end{cases}$$

poniamo:

$$G_{i,j}(Q) = \delta_{i,j} + \frac{\overline{P_0Q}^3(k-1)}{2(k+2)} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{\overline{P_0Q}^2 - \overline{P_0P}^2}{\overline{PQ}^3}\right)\right]_{P=P_0} . \tag{12}$$

Con ciò la (11) equivale alle seguenti equazioni scalari

$$s_i(P_0) = \frac{1}{4\pi R^2}\int_{F\Sigma} \sum_{j=1}^{3} G_{i,j}(Q) s_j(Q)\, dF\,\Sigma(Q) , \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{13}$$

Queste formule costituiscono il preannunciato teorema di media per i vettori elastici e permettono di enunciare la seguente proposizione:

Se $\mathbf{s}(P)$ *è un vettore elastico nel dominio sferico* Σ, *i valori che le sue componenti assumono nel centro* P_0 *di tale dominio sono determinati dai valori che ad esse competono sulla frontiera* FΣ *mediante le* (13).

Le funzioni $G_{i,j}(Q)$ costituiscono gli elementi di una matrice quadrata di ordine 3, la quale, come risulta dalle (12), è simmetrica.

Una volta assegnato il valore di $k > \frac{4}{3}$, tali $G_{i,j}(Q)$ sono determinate e non dipendono dalle componenti del particolare vettore elastico per il quale le (13) sono state dimostrate.

A rigore, il ragionamento da noi seguito per stabilire le (13) per $k > \frac{4}{3}$ sussiste ugualmente per ogni valore di $k \neq -2$.

Imponendo la limitazione sopra indicata per k abbiamo voluto esaminare il caso che ha interesse nella teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici.