ANTONIO NADILE (*)

Influenza di vincoli anolonomi sullo spostamento di equilibrio di un sistema. (**)

§ 1. – Oggetto della ricerca.

La ricerca di nuove configurazioni di equilibrio di un sistema in prossimità di una configurazione di equilibrio stabile, nella ipotesi in cui intervengano vincoli olonomi ed una eventuale sollecitazione addizionale, fu eseguita da TULLIO LEVI-CIVITA nella interessante Memoria: *Sullo spostamento dell'equilibrio* (Atti Istituto Veneto, t. 71, p. II, 1911-12, pp. 241-249) e riportata, quasi integralmente, nelle Sue *Lezioni di Meccanica Razionale* (vol. II, p. I, pag. 447). L'Autore in quella classica ricerca riesce a caratterizzare l'equilibrio del sistema nelle indicate condizioni pervenendo alla conclusione che l'equilibrio spostato è stabile se il sistema è sotto l'azione di vincoli (olonomi) lineàri ed eventualmente di un campo di forza pressochè uniforme.

In questa breve Nota mi propongo una ricerca analoga allo scopo di mostrare qual'è l'influenza di vincoli di mobilità *anolonomi* sullo spostamento dell'equilibrio di un sistema. Più precisamente, partendo da una configurazione C_0 di equilibrio stabile di un dato sistema materiale, e supponendo che esso si trovi soggetto a vincoli di mobilità anolonomi, mostro anzitutto che C_0 è una configurazione di equilibrio stabile sotto l'azione dei nuovi vincoli. Successivamente rilevo la esistenza di nuove configurazioni di equilibrio spostato assegnando infine le condizioni atte ad assicurare la stabilità di esse.

I risultati ottenuti possono essere compendiati in un unico teorema che enuncio a conclusione della Nota.

(*) Indirizzo: Via Ghibellina Isol. 132 - Messina (Italia).
(**) Lavoro ricevuto il 20-IV-1950.

§ 2. – Impostazione del problema.

Consideriamo un sistema materiale a vincoli bilaterali e privi di attrito la cui posizione, in ogni istante, quando si tenga conto di tutti i vincoli olonomi, si possa individuare mediante una n-pla di coordinate lagrangiane $q_1, q_2, \ldots, q_n$; sia U il potenziale da cui derivano le forze conservative cui esso è soggetto e C_0 $(q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0)$ una configurazione in cui detto potenziale assume il massimo valore: quindi C_0 sarà una configurazione di equilibrio stabile.

Ci proponiamo di caratterizzare lo spostamento di equilibrio del sistema nell'ipotesi che esso venga ulteriormente assoggettato ad $m < n$ vincoli di mobilità anolonomi espressi dalle seguenti equazioni pfaffiane, non illimitatamente integrabili, e indipendenti:

$$\sum_1^n {}_r\, b_{ir}\dot{q}_r = 0\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{1}$$

dove le b_{ir} sono funzioni delle $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Le variazioni δq_r, che definiscono, ad ogni istante, a partire dalla generica configurazione, uno spostamento virtuale, non sono arbitrarie, come nel caso olonomo, ma debbono soddisfare alle m equazioni indipendenti lineari ed omogenee:

$$\sum_1^n {}_r\, b_{ir}\,\delta q_r = 0\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)\,. \tag{2}$$

Il problema dinamico si può impostare, volendo, col metodo dei *moltiplicatori di* LAGRANGE. Precisamente se si moltiplicano le m equazioni (2) rispettivamente per m parametri arbitrari $-\lambda_i$ e si sommano alla equazione generale

$$\sum_1^n {}_r \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} - \frac{\partial U}{\partial q_r}\right]\delta q_r = 0\,,$$

dove $T = \frac{1}{2}\sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\dot{q}_r\dot{q}_s$ rappresenta la forza viva del sistema, si otterrà una equazione da cui, eguagliando a zero i coefficienti dei δq_r, si deducono le equazioni

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = \frac{\partial U}{\partial q_r} + \sum_1^m {}_i\, \lambda_i\, b_{ir}\,, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{3}$$

le quali insieme con le (1) costituiscono una sistema di $n+m$ equazioni nelle $n+m$ funzioni incognite q_r $(r=1, 2, \ldots, n)$ e λ_i $(i=1, 2, \ldots, m)$.

La eliminazione dei parametri λ_i fra queste ultime, come vedremo fra poco, fornisce $n-m$ equazioni differenziali che insieme alle (1) definiscono il moto del sistema sotto l'azione dei nuovi vincoli anolonomi.

Giova notare che il problema dinamico del sistema soggetto ai vincoli (1) viene così ricondotto all'analogo problema relativo allo stesso sistema soggetto esclusivamente ai soli vincoli olonomi purchè alle forze applicate si aggiungano le forze le cui componenti lagrangiane sono $Q_r = \sum_1^m {}_i \lambda_i b_{ir}$. Queste forze, com'è manifesto, hanno carattere *girostatico* poichè si ha:

$$\sum_1^n {}_r Q_r \dot{q}_r = \sum_1^m {}_i \sum_1^n {}_r \lambda_i b_{ir} \dot{q}_r = \sum_1^m {}_i \lambda_i \sum_1^n {}_r b_{ir} \dot{q}_r = 0\,.$$

Ponendo

$$T_r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r}\,, \qquad U_r = \frac{\partial U}{\partial q_r}$$

le equazioni (3) assumono l'aspetto:

$$\sum_1^m {}_i \lambda_i b_{ir} = T_r - U_r\,, \qquad (r=1, 2, \ldots, n)\,.$$

Da quest'ultime la eliminazione dei parametri λ_i si effettuerà servendosi del teorema di Rouché-Capelli per cui, essendo m la caratteristica della matrice delle b_{ik}, per la indipendenza delle (1), e supponendo che sia diverso da zero il determinante di ordine m:

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mm} \end{vmatrix}\,,$$

si hanno le equazioni del moto sotto la forma espressiva:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \ldots & b_{m1} & T_1 - U_1 \\ b_{12} & b_{22} & \ldots & b_{m2} & T_2 - U_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{1m} & b_{2m} & \ldots & b_{mm} & T_m - U_m \\ b_{1,m+\alpha} & b_{2,m+\alpha} & \ldots & b_{m,m+\alpha} & T_{m+\alpha} - U_{m+\alpha} \end{vmatrix} = 0\,; \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-m)\,. \tag{4}$$

Nella configurazione C_0, già considerata, intanto si ha:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0\,, \qquad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0\,, \dots, \qquad \frac{\partial U}{\partial q_n} = 0\,,$$

oltre alle $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$, $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dots = \dot{q}_n = 0$.

Ora si scorge immediatamente che le equazioni (4) risultano identicamente soddisfatte da tali valori. Dunque la configurazione considerata è anche configurazione di equilibrio del sistema sotto l'azione dei nuovi vincoli. E possiamo aggiungere che, avendo U in essa un massimo effettivo, tale configurazione è di equilibrio stabile.

Posto per brevità

$$B_{h,m+\alpha} = \frac{1}{B}\begin{vmatrix} b_{11}b_{12}\dots b_{1,h-1} & b_{1,m+\alpha}\, b_{1,h+1}\dots b_{1m} \\ b_{21}b_{22}\dots b_{2,h-1} & b_{2,m+\alpha}\, b_{2,h+1}\dots b_{2m} \\ \dots & \dots \\ b_{m1}b_{m2}\dots b_{m,h-1} & b_{m,m+\alpha} b_{m,h+1}\dots b_{mm} \end{vmatrix} = \sum_{1}^{m}{}_j\, b^{jh}\, b_{j,m+\alpha}\,, \tag{5}$$

ove b^{jh} è l'elemento reciproco di b_{jh} nel determinante B, le equazioni (4), mediante facili trasformazioni, si scriveranno:

$$T_{m+\alpha} - U_{m+\alpha} - \sum_{1}^{m}{}_h\, B_{h,m+\alpha}(T_h - U_h) = 0\,, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n-m). \tag{6}$$

Intanto le equazioni dei vincoli anolonomi

$$\sum_{1}^{m}{}_h\, b_{ih}\dot{q}_h + \sum_{1}^{n-m}{}_\alpha\, b_{i\ m+\alpha}\dot{q}_{m+\alpha} = 0\,, \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

risolute rispetto alle $\dot{q}_h$, dànno:

$$\dot{q}_h = -\sum_{1}^{m}{}_j \sum_{1}^{n-m}{}_\alpha\, b^{jh} b_{j,m+\alpha}\dot{q}_{m+\alpha} \qquad (h = 1, 2, \dots, m),$$

cioè, per la (5),

$$\dot{q}_h = -\sum_{1}^{n-m}{}_\alpha\, B_{h,m+\alpha}\dot{q}_{m+\alpha}\,, \qquad (h = 1, 2, \dots, m)$$

per cui il generico spostamento virtuale sarà definito dalle

$$\delta q_h = -\sum_{1}^{n-m}{}_\alpha\, B_{h,m+\alpha}\,\delta q_{m+\alpha}\,, \qquad (h = 1, 2, \dots, m). \tag{7}$$

§ 3. – Determinazione delle configurazioni di equilibrio spostato.

Consideriamo ora uno spostamento del sistema, compatibile coi vincoli anolonomi imposti, in un intorno convenientemente piccolo della configurazione C_0 e chiamiamo C la configurazione che il sistema assume in virtù di tale spostamento. Se la nuova configurazione è una configurazione di equilibrio le componenti lagrangiane delle forze debbono risultare tutte nulle, per cui si avrà:

$$\frac{\partial U}{\partial q_r} + \sum_1^m {}_j \lambda_j b_{jr} = 0\,, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Eliminando fra queste i parametri λ si ottengono le equazioni:

$$\text{(8)} \qquad \frac{\partial U}{\partial q_{m+\alpha}} - \sum_1^m {}_h B_{h,m+\alpha} \frac{\partial U}{\partial q_h} = 0\,, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-m)\,,$$

deducibili anche direttamente dalle (6) ove si ponga $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \ldots = \dot{q}_n = 0$, le quali caratterizzano le eventuali configurazioni di equilibrio spostato.

Le (8) costituiscono un sistema di $n - m$ equazioni nelle quantità incognite $q_1, q_2, \ldots, q_n$ e in generale, fissati nell'intorno di C_0 i valori di m delle q, per es. delle $q_1, q_2, \ldots, q_m$, esse definiscono le rimanenti q, cioè $q_{m+1}, q_{m+2}, \ldots, q_n$, in termini delle $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Dunque si può affermare che in un intorno della configurazione C_0 esistono in generale ∞^m configurazioni C di equilibrio spostato, le quali si ottengono in corrispondenza a valori sufficientemente piccoli ed arbitrari di m delle coordinate q.

Se ci limitiamo a considerare un intorno del prim'ordine della configurazione C_0, tale cioè che si ritengano trascurabili i termini di grado superiore al primo nelle q, le equazioni (8) si riducono alle seguenti:

$$\text{(9)} \qquad \sum_1^n {}_r \Big(\beta_{m+\alpha,r} - \sum_1^m {}_h B^{(0)}_{h,m+\alpha} \beta_{hr}\Big) q_r = 0\,, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-m)\,,$$

dove si è posto per brevità:

$$\beta_{ik} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i\, \partial q_k}\right)_0$$

e ove l'indice (0) sta a denotare che gli elementi corrispondenti sono calcolati in C_0.

Le equazioni (7), che definiscono gli spostamenti virtuali, nello stesso intorno del prim'ordine, cioè a meno di termini di ordine superiore nelle q e δq, si riducono alle seguenti:

$$\delta q_h = -\sum_{1}^{n-m}{}_{\alpha} B^{(0)}_{h,m+\alpha}\,\delta q_{m+\alpha}\,, \qquad (h = 1, 2, \ldots, m), \tag{10}$$

da cui mediante una semplice integrazione si ottiene:

$$q_h = \varepsilon_h - \sum_{1}^{n-m}{}_{\alpha} B^{(0)}_{h,m+\alpha} q_{m+\alpha}\,, \qquad (h = 1, 2, \ldots, m) \tag{11}$$

essendo le ε_h costanti arbitrarie infinitamente piccole.

Associando le (11) alle (9) si ha un sistema di n equazioni lineari nelle incognite $q_1, q_2, \ldots, q_n$ dal quale, se è diverso da zero il determinante dei coefficienti, si possono trarre le $q_1, q_2, \ldots, q_n$ in termini delle m costanti $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$. Resta dunque assodata la circostanza che ai valori così ottenuti delle q corrispondono, come nel caso generale, ∞^m configurazioni di equilibrio spostato del sistema situate nell'intorno di prim'ordine della configurazione C_0.

§ 4. – Stabilità dell'equilibrio spostato.

Accertata la esistenza delle precedenti configurazioni di equilibrio spostato ci proponiamo ora di trovare in quali casi detto equilibrio è stabile. Per questo basta che il potenziale U abbia in C un massimo effettivo rispetto ad ogni altra configurazione, sufficientemente prossima a C_0, consentita dai vincoli. Ciò accadrà quando risulti negativo il differenziale secondo $\delta_2 U$ calcolato tenendo conto delle equazioni dei vincoli.

Ora si ha:

$$\delta U = \sum_{1}^{n}{}_{r} \frac{\partial U}{\partial q_r}\,\delta q_r\,,$$

da cui

$$\delta^2 U = \sum_{1}^{n}{}_{rs} \frac{\partial^2 U}{\partial q_r\,\partial q_s}\,\delta q_r\,\delta q_s + \sum_{1}^{n}{}_{r} \frac{\partial U}{\partial q_r}\,\delta^2 q_r\,.$$

Intanto dalle (7) si deduce:

$$\delta^2 q_h = -\sum_{1}^{n-m}{}_{\alpha}\sum_{1}^{n}{}_{r} \frac{\partial B_{h,m+\alpha}}{\partial q_r}\,\delta q_r\,\delta q_{m+\alpha} - \sum_{1}^{n-m}{}_{\alpha} B_{h,m+\alpha}\,\delta^2 q_{m+\alpha} \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

e perciò:

$$\delta^2 U = \sum_{1}^{n}{}_{rs} \frac{\partial^2 U}{\partial q_r \, \partial q_s} \delta q_r \, \delta q_s - \sum_{1}^{n}{}_{r} \sum_{1}^{n-m}{}_{\alpha} \left(\sum_{1}^{m}{}_{h} \frac{\partial U}{\partial q_h} \frac{\partial B_{h,m+\alpha}}{\partial q_r} \right) \delta q_r \, \delta q_{m+\alpha} +$$
$$+ \sum_{1}^{n-m}{}_{\alpha} \left(\frac{\partial U}{\partial q_{m+\alpha}} - \sum_{1}^{n}{}_{h} \frac{\partial U}{\partial q_h} B_{h,m+\alpha} \right) \delta^2 q_{m+\alpha} ,$$

da cui, in virtù delle (8), si ha:

$$\delta^2 U = \sum_{1}^{n}{}_{rs} \frac{\partial^2 U}{\partial q_r \, \partial q_s} \delta q_r \, \delta q_s - \sum_{1}^{n}{}_{r} \sum_{1}^{n-m}{}_{\alpha} \left(\sum_{1}^{m}{}_{h} \frac{\partial U}{\partial q_h} \frac{\partial B_{h,m+\alpha}}{\partial q_r} \right) \delta q_r \, \delta q_{m+\alpha} , \tag{12}$$

dove le δq non sono indipendenti ma risultano legate dalle equazioni (7).

Ora, poichè nella C_0 il potenziale ha un massimo effettivo, e perciò la forma quadratica

$$U_0 = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_{rs} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_r \, \partial q_s} \right)^{(0)} q_r q_s$$

a cui esso si riduce in prima approssimazione è definita negativa, si può concludere, per la continuità di U, che l'analoga forma

$$\frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_{rs} \frac{\partial^2 U}{\partial q_r \, \partial q_s} q_r q_s ,$$

i cui coefficienti vengono però calcolati in una configurazione C sufficiente prossima a C_0, è anch'essa definita negativa. Ne consegue che la prima sommatoria del secondo membro della (12) risulta sempre negativa nelle variabili δq_r ($r = 1, 2, \ldots, n$), supposte indipendenti, e tale si conserverà dopoaver effettuato la riduzione in base alle equazioni dei vincoli (7), mentre altrettanto non potrà dirsi della rimanente sommatoria. E di qui scaturisce che, in generale, nulla si potrà affermare circa la stabilità delle configurazioni di equilibrio spostato considerate in precedenza.

Se però ci riferiamo a configurazioni C di equilibrio, situate nell'intorno di prim'ordine di C_0, per cui siano valide le (9), (10) e (11), si verifica facilmente che il termine addizionale del secondo membro della (12) svanisce.

Stando ai risultati ottenuti possiamo dunque enunciare il teorema:

Se per un sistema materiale con vincoli indipendenti dal tempo e soggetto a forze conservative, la cui posizione in ogni istante sia individuata da n parametri lagrangiani, si ha una configurazione C_0 di equilibrio stabile, in corrispondenza alla quale il potenziale U ha un massimo effettivo, in seguito all'intervento di $m < n$ vincoli di mobilità anolonomi, in un intorno del prim'ordine della configurazione C_0, esistono in generale ∞^m configurazioni C di equilibrio spostato, dipendenti da m costanti arbitrarie infinitamente piccole, in corrispondenza delle quali l'equilibrio è ancora stabile.