BRUNO PINI (*)

Sulle proprietà di minimo, e relative conseguenze, delle autosoluzioni di un sistema autoaggiunto di equazioni differenziali lineari omogenee del secondo ordine. (**)

Il presente lavoro fa seguito a un altro ([1]) sugli autovalori e le autosoluzioni relativi al sistema differenziale di STURM-LIOUVILLE

$$(A\mathrm{y}' + C\mathrm{y})' + C\mathrm{y}' = (P - \lambda Q)\mathrm{y},$$
$$\mathrm{y}(a) = \mathrm{y}(b) = 0, \quad a \leqslant x \leqslant b$$

(y vettore ad n componenti, funzione incognita di x; A, P, Q, C matrici quadrate d'ordine n, le prime tre simmetriche e la quarta emisimmetrica, funzioni note di x continue su (a, b), la prima e l'ultima anche dotate di derivate prime continue; λ un parametro). In tale lavoro, riattaccandosi a risultati noti ([2]), è stata studiata la configurazione degli autovalori relativi al precedente sistema differenziale. Qui mostreremo come, in modo del tutto naturale, si estendano alle autosoluzioni, del medesimo sistema, le note proprietà di minimo di tipo hilbertiano delle autosoluzioni di una equazione differenziale ordinaria del secondo ordine; useremo in tale estensione il procedimento seguito da M. PICONE per le equazioni del secondo ordine ([3]) ed esteso da G. CIMMINO ([4]) alle equazioni lineari autoaggiunte del quarto ordine. Daremo

---

(*) Indirizzo: Via Hercolani, 2 - Forlì (Italia).

(**) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della Università di Bologna. e ricevuto il 6-X-1949.

([1]) B. PINI, *Autovalori e autosoluzioni per i sistemi autoaggiunti* ecc., Univ. Roma, Ist. Naz. Alta Mat., Rend. Mat. e Appl. (5), **8**, 351-377 (1949).

([2]) Cfr. G. CIMMINO, *Sui sistemi di infinite equazioni differenziali lineari con infinite funzioni incognite*. Memorie Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6), **5**, 273-315 (1933).

([3]) M. PICONE, *Sulle autosoluzioni e sulle formule di maggiorazione per gl'integrali delle equazioni differenziali ordinarie autoaggiunte*. Math. Zeit. **28**, 519-555 (1928).

([4]) G. CIMMINO, *Autosoluzioni e autovalori nelle equazioni differenziali lineari ordinarie autoaggiunte di ordine superiore*. Math. Zeit. **32**, 1-58 (1930).

poi una valutazione asintotica degli autovalori e delle autosoluzioni accennando a un teorema di sviluppo in serie di autofunzioni.

1. – Cominciamo col ricordare alcuni risultati del lavoro citato in (1), relativi ai sistemi autoaggiunti

$$(Ay' + Cy)' + Cy' = (P - \lambda Q)y . \tag{1}$$

Indicata con $U(x, \lambda)$ la matrice che ha come colonne le componenti di n integrali $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ linearmente indipendenti di (1), nulli per $x = a$, e posto $\Phi = (AU' + CU)U^{-1}$ in ogni punto di (a, b) ove U è invertibile, sussiste l'identità

$$\begin{aligned} A\mathbf{y}' \times \mathbf{y}' - 2C\mathbf{y}' \times \mathbf{y} + (P - \lambda Q)\mathbf{y} \times \mathbf{y} &= \\ = A(\mathbf{y}' - A^{-1}(\Phi - C)\mathbf{y}) \times (\mathbf{y}' - A^{-1}(\Phi - C)\mathbf{y}) &+ (\Phi\mathbf{y} \times \mathbf{y})' \end{aligned} \tag{2}$$

essendo $\mathbf{y}$ un arbitrario vettore continuo e dotato di derivata prima continua; segue che se A è definita positiva e $\mathbf{y}(a') = \mathbf{y}(b') = 0$, riesce

$$\int_{a'}^{b'} (A\mathbf{y}' \times \mathbf{y}' - 2C\mathbf{y}' \times \mathbf{y} + P\mathbf{y} \times \mathbf{y})\, dx \geqslant \lambda \int_{a'}^{b'} Q\mathbf{y} \times \mathbf{y}\, dx$$

per ogni intervallo $(a', b') \subset (a, b)$ in ogni punto del quale U sia invertibile, il segno di eguaglianza sussistendo solo se $\mathbf{y}$ è un integrale di (1).

Consideriamo ora il sistema (1) con le condizioni agli estremi

$$\mathbf{y}(a) = \mathbf{y}(b) = 0 . \tag{3}$$

Nell'ipotesi che la matrice $\left\| \begin{matrix} A & C \\ -C & P \end{matrix} \right\|$ sia definita positiva (5) e Q sia anch'essa definita positiva (6), esiste una successione non decrescente e non limitata di numeri positivi

$$0 < \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots$$

tali che per $\lambda = \lambda_\nu$ esistono, in $a < x \leqslant b$, ν punti $x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}, \ldots, x_\nu^{(\nu)}$ di cui mai più di n coincidenti tra loro e mai più di $n - 1$ coincidenti con b, per cui esiste un integrale $\mathbf{y}$ nullo in a e in $x_1^{(\nu)}$, uno nullo in a e in $x_2^{(\nu)}, \ldots$, uno nullo in a e in b, riuscendo linearmente indipendenti quelli corrispondenti a punti $x^{(\nu)}$, se ve ne sono, coincidenti. In ciascuno, ξ, di tali punti la matrice $U(\xi, \lambda_\nu)$ ha

(5) Oppure anche solo che A sia definita positiva e $\left\| \begin{matrix} O & C \\ -C & P \end{matrix} \right\|$ semidefinita positiva.

(6) O anche solo semidefinita positiva non nulla.

caratteristica $< n$ e precisamente ha caratteristica $n-k$ se, per un opportuno i, riesce

$$x_{i-1}^{(\nu)} < \xi = x_i^{(\nu)} = x_{i+1}^{(\nu)} = \ldots = x_{i+k-1}^{(\nu)} < x_{i+k}^{(\nu)} .$$

Noi indicheremo con $\mathbf{y}_0$, $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_\nu, \ldots$ la successione delle autofunzioni del sistema differenziale (1)-(3), intendendo che, se $\lambda_i < \lambda_{i+1} = \lambda_{i+2} = \ldots = \lambda_{i+j} < \lambda_{i+j+1}$, siano $\mathbf{y}_{i+1}, \ldots, \mathbf{y}_{i+j}$, j integrali linearmente indipendenti di (1)-(3) per $\lambda = \lambda_{i+1} = \ldots = \lambda_{i+j}$.

Sussiste poi per due autofunzioni $\mathbf{y}_h$, $\mathbf{y}_k$ corrispondenti ad autovalori distinti la condizione di ortogonalità rispetto alla matrice peso Q

$$\int_a^b Q\mathbf{y}_h \times \mathbf{y}_k \,\mathrm{d}x = 0 , \tag{4}$$

mentre per ogni autofunzione $\mathbf{y}_i$ si ha

$$\int_a^b Q\mathbf{y}_i \times \mathbf{y}_i \,\mathrm{d}x > 0$$

(ovvia se Q si suppone, come faremo, definita positiva).

È chiaro che la condizione (4) si può pensare soddisfatta anche per le autosoluzioni corrispondenti ad autovalori multipli [7], e ciò noi supporremo sempre verificato nel seguito.

---

[7] Infatti se $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_p$ sono p autosoluzioni (linearmente indipendenti) corrispondenti all'autovalore λ di molteplicità p, poichè il gramiano

$$\begin{vmatrix} \int_a^b Q\mathbf{y}_1 \times \mathbf{y}_1 \,\mathrm{d}x \ldots\ldots \int_a^b Q\mathbf{y}_p \times \mathbf{y}_1 \,\mathrm{d}x \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \int_a^b Q\mathbf{y}_1 \times \mathbf{y}_p \,\mathrm{d}x \ldots\ldots \int_a^b Q\mathbf{y}_p \times \mathbf{y}_p \,\mathrm{d}x \end{vmatrix}$$

è > 0 insieme a tutti i suoi minori principali, quale discriminante della forma quadratica

$$\sum_1^p {}_{hk} \left(\int_a^b Q\mathbf{y}_h \times \mathbf{y}_k \,\mathrm{d}x \right) \alpha_h \alpha_k = \int_a^b Q \sum_1^p {}_i\, \alpha_i \mathbf{y}_i \times \sum_1^p {}_i\, \alpha_i \mathbf{y}_i \,\mathrm{d}x ,$$

che è definita positiva, tale essendo la matrice Q, il noto procedimento di ortogonalizzazione di Schmidt permette di sostituire i vettori $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_p$ con altri (opportune loro combinazioni lineari) due a due ortogonali (sostituendo $\mathbf{y}_h$, $h = 1, 2, \ldots, p$, con $a_{h,1}\mathbf{y}_1 + \ldots + a_{h,h-1}\mathbf{y}_{h-1} + \mathbf{y}_h$, ove $a_{h,1}, \ldots, a_{h,h-1}$ costituisce una soluzione del sistema

$$\int_a^b Q(a_{h,1}\mathbf{y}_1 + \ldots + a_{h,h-1}\mathbf{y}_{h-1} + \mathbf{y}_h) \times \mathbf{y}_i \,\mathrm{d}x = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, h-1)).$$

2. – Ciò premesso, passiamo a stabilire un teorema di minimo per le autosoluzioni del sistema differenziale (1)-(3). Allo scopo cominciamo col fare qualche osservazione.

Intanto la (2) è valida, su tutto (a, b), qualora si prendano per λ e $\mathbf{y}$ un autovalore λ_ν e una corrispondente autosoluzione $\mathbf{y}_\nu$; infatti, poichè $\mathbf{y}_\nu = U(x, \lambda_\nu)\boldsymbol{\alpha}$, essendo $\boldsymbol{\alpha}$ un opportuno vettore costante, si ha

$$A(\mathbf{y}'_\nu - A^{-1}(\Phi - C)\mathbf{y}_\nu) \times (\mathbf{y}'_\nu - A^{-1}(\Phi - C)\mathbf{y}_\nu) + \\ + (\Phi\mathbf{y}_\nu \times \mathbf{y}_\nu)' = (U(AU' + CU)\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\alpha})'$$

dal momento che $\mathbf{y}'_\nu - A^{-1}(\Phi - C)\mathbf{y}_\nu \equiv 0$; d'altra parte

$$A\mathbf{y}'_\nu \times \mathbf{y}'_\nu - 2C\mathbf{y}'_\nu \times \mathbf{y}_\nu + (P - \lambda_\nu Q)\mathbf{y}_\nu \times \mathbf{y}_\nu = \\ = (\overline{U}'AU' - 2\overline{U}CU' + \overline{U}(P - \lambda_\nu Q)U)\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\alpha} = (\overline{U}(AU' + CU)\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\alpha})'$$

come si riconosce tenendo presente che $\overline{U}((AU' + CU)' + CU') = \overline{U}(P - \lambda_\nu Q)U$ e che $-\overline{U}CU'\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\alpha} = \overline{U}'CU\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\alpha}$.

Noi vogliamo ora delle condizioni per i vettori $\mathbf{y}$ atte ad assicurare la validità della (2) per $\lambda = \lambda_\nu$ su tutto (a, b) e non soltanto nei punti di (a, b) ove $U(x, \lambda_\nu)$ è invertibile; allo scopo basterà assicurare la convergenza del vettore $U^{-1}\mathbf{y}$ in tutti i punti di (a, b) e completarne la definizione su tutto (a, b) assegnando ad esso i valori limiti nei punti ove la matrice U non è invertibile. U è invertibile su tutto (a, b) esclusi i punti $x_1^{(\nu)}, \ldots, x_\nu^{(\nu)}$ di cui, com'è stato ricordato sopra, mai più di n possono coincidere tra loro e mai più di $n-1$ possono coincidere con b; noi, per comodità, diremo che ξ è un punto $x^{(\nu)}$ k-plo se k, e non più, punti $x^{(\nu)}$ consecutivi coincidono in ξ; in tali ipotesi si annullano per $x = \xi$ tutte le derivate successive del $|U(x, \lambda_\nu)|$ (8) fino a quella d'ordine $k-1$ inclusa, mentre la derivata d'ordine k è diversa da zero (9). Per semplicità di esposizione tratteremo dapprima i casi estremi relativi ai valori 1 ed n di k. Sia ξ un punto $x^{(\nu)}$ semplice; $U^{-1}\mathbf{y} = \dfrac{\text{aggiunta di } U}{|U|}\mathbf{y}$ è il vettore di componenti $\dfrac{\sum_1^n{}_k |U_{ki}| y_k}{|U|}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$; poichè $|U(\xi, \lambda_\nu)| = 0$ ma $|U(\xi, \lambda_\nu)|' \neq 0$, imponiamo al vettore $\mathbf{y}$ di verificare le condizioni

$$\sum_1^n{}_k |U_{ki}(\xi, \lambda_\nu)| y_k(\xi) = 0 \qquad \text{per} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

---

(8) Se M è una matrice quadrata, col simbolo $|M|$ s'intende il det. M.
(9) Cfr. lavoro citato in (1).

Ma agg. $U(\xi, \lambda_\nu)$ ha caratteristica uno poichè $U(\xi, \lambda_\nu)$ ha caratteristica $n-1$, onde la precedente condizione se è soddisfatta per un particolare valore di i, lo è di conseguenza per ogni altro valore di i $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Pertanto se ξ è un punto $x^{(\nu)}$ semplice, noi imporremo al vettore $\mathbf{y}$ la condizione

$$\sum_1^n {}_k \mid U_{ki}(\xi, \lambda_\nu) \mid y_k(\xi) = 0$$

per un certo valore di i per cui non tutti i minori $\mid U_{ki}(\xi, \lambda_\nu) \mid$, $(k = 1, 2, \dots, n)$ si annullano.

Supponiamo ora che ξ sia un punto $x^{(\nu)}$ n-plo; allora $U(\xi, \lambda_\nu)$ ha caratteristica zero e, come s'è detto, si annullano per $x = \xi$ tutte le derivate successive di $\mid U(x, \lambda_\nu) \mid$ fino a quella d'ordine $n-1$ inclusa mentre la derivata d'ordine n è diversa da zero. Noi imporremo al vettore $\mathbf{y}$ di soddisfare le n^2 condizioni

$$\Big(\sum_1^n {}_k \mid U_{ki}(x, \lambda_\nu) \mid y_k(x)\Big)_{x=\xi} = 0\,, \qquad \Big(\sum_1^n {}_k \mid U_{ki}(x, \lambda_\nu) \mid y_k(x)\Big)'_{x=\xi} = 0\,, \dots,$$
$$\Big(\sum_1^n {}_k \mid U_{ki}(x, \lambda_\nu) \mid y_k(x)\Big)^{(n-1)}_{x=\xi} = 0\,, \qquad (i = 1, 2, \dots, n)\,.$$

Ma, per ogni valore di i, le prime $n-1$ di queste sono certamente soddisfatte perchè anche i minori $\mid U_{ki}(\xi, \lambda_\nu) \mid$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ sono di caratteristica zero e quindi $\mid U_{ki}(x, \lambda_\nu) \mid$ si annulla, per $x = \xi$, insieme a tutte le sue derivate successive fino a quella d'ordine $n-2$ compresa mentre non sarà eguale a zero la derivata $(n-1)$-ma di ogni $\mid U_{ki}(x, \lambda_\nu) \mid$. Perciò le precedenti condizioni si riducono alle

$$\Big(\sum_1^n {}_k \mid U_{ki}(x, \lambda_\nu) \mid y_k(x)\Big)^{(n-1)}_{x=\xi} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

e quindi, sempre per le considerazioni di sopra, alle

$$\Big(\sum_1^n {}_k \mid U_{ki}(x, \lambda_\nu) \mid^{(n-1)} y_k(x)\Big)_{x=\xi} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n)\,,$$

ovvero

$$\sum_1^n {}_k \mid \{\, U'(x, \lambda_\nu) \,\}_{ki} \mid_{x=\xi} y_k(\xi) = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n)\,,$$

indicando con $\mid \{\, U'(x, \lambda_\nu) \,\}_{ki} \mid$ il complemento algebrico dell'elemento appartenente alla riga k-ma e alla colonna i-ma nella matrice $U'(x, \lambda_\nu)$ che, come si sa, è invertibile per $x = \xi$. Ma se una matrice è invertibile, tale è anche la sua aggiunta e quindi le precedenti condizioni portano a fare l'ipotesi che sia

$$y_1(\xi) = y_2(\xi) = ... = y_n(\xi) = 0\,.$$

Consideriamo infine il caso che ξ sia un punto k-plo. Poichè la matrice $U(\xi, \lambda_\nu)$ ha caratteristica $n-k$, k colonne, p. es. le ultime, saranno combinazioni lineari delle prime $n-k$, cioè

$$\mathbf{u}_{n-k+h}(\xi, \lambda_\nu) = \sum_1^{n-k}{}_r\, c_r^{(h)} \mathbf{u}_r(\xi, \lambda_\nu) \qquad (h = 1, 2, ..., k)\,,$$

convenendo di indicare, com'è già stato detto, con $\mathbf{u}_i(x, \lambda_\nu)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ il vettore le cui componenti sono, ordinatamente, gli elementi della colonna i-ma della matrice $U(x, \lambda_\nu)$. Allora, ovviamente, i minori complementari degli elementi delle ultime k colonne di $U(x, \lambda_\nu)$, p. es. quelli relativi agli elementi della colonna $(n-k+1)$-ma, cioè i determinanti d'ordine $n-1$ della matrice

$$\| \mathbf{u}_1(x, \lambda_\nu), ..., \mathbf{u}_{n-k}(x, \lambda_\nu); \mathbf{u}_{n-k+2}(x, \lambda_\nu), ..., \mathbf{u}_n(x, \lambda_\nu) \|$$

ovvero della matrice

$$\| \mathbf{u}_1(x, \lambda_\nu), ..., \quad \mathbf{u}_{n-k}(x, \lambda_\nu), \quad \mathbf{u}_{n-k+2}(x, \lambda_\nu) - \\ - \sum_1^{n-k}{}_r\, c_r^{(2)} \mathbf{u}_r(x, \lambda_\nu), ..., \quad \mathbf{u}_n(x, \lambda_\nu) - \sum_1^{n-k}{}_r\, c_r^{(k)} \mathbf{u}_r(x, \lambda_\nu) \|$$

saranno tutti nulli per $x = \xi$, insieme alle loro derivate successive fino a quelle d'ordine $k-2$ incluse (cioè fino a quelle in cui compare almeno una delle ultime k colonne non derivata) mentre saranno non tutte nulle le derivate $(k-1)$-me. Inoltre i minori complementari degli elementi delle prime $n-k$ colonne di $U(\xi, \lambda_\nu)$, poniamo p. es. quelli relativi agli elementi della prima colonna, cioè i determinanti d'ordine $n-1$ della matrice

$$\| \mathbf{u}_2(x, \lambda_\nu), ..., \mathbf{u}_{n-k}(x, \lambda_\nu), \mathbf{u}_{n-k+1}(x, \lambda_\nu), ..., \mathbf{u}_n(x, \lambda_\nu) \|$$

ovvero della matrice

$$\| \mathbf{u}_2(x, \lambda_\nu), ..., \quad \mathbf{u}_{n-k}(x, \lambda_\nu), \quad \mathbf{u}_{n-k+1}(x, \lambda_\nu) - \\ - \sum_2^{n-k}{}_r\, c_r^{(1)} \mathbf{u}_r(x, \lambda_\nu), ..., \quad \mathbf{u}_n(x, \lambda_\nu) - \sum_2^{n-k}{}_r\, c_r^{(k)} \mathbf{u}_r(x, \lambda_\nu) \|$$

saranno tutti nulli per $x = \xi$ insieme alle loro derivate successive fino a quelle d'ordine $k-2$ incluse perchè in ogni caso figureranno almeno due delle ultime k colonne non derivate le quali risulteranno proporzionali causa le relazioni precedenti, osservando che per $x = \xi$ la colonna $(n-k+h)$-ma

$(h = 1, 2, \ldots, k)$ è costituita dalle componenti del vettore $c_1^{(h)}\mathbf{u}_1(\xi)$. Le condizioni da imporre sono perciò

$$\Big(\sum_1^n{}_h \mid U_{hi}(x, \lambda_\nu) \mid y_h(x)\Big)_{x=\xi}^{(k-1)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ossia

$$\Big(\sum_1^n{}_h \mid U_{hi}(x, \lambda_\nu) \mid^{(k-1)} y_h(x)\Big)_{x=\xi} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Si hanno intanto k condizioni, quelle corrispondenti a $i = n - k + 1, \ldots, n$. Per quanto riguarda i valori di $i = 1, 2, \ldots, n - k$, saranno non tutti nulli solo i minori dedotti da $\mid U_{hi}(x, \lambda_\nu) \mid$ derivando $k - 1$ delle ultime k colonne; ma allora le prime $n - k - 1$ colonne saranno non derivate e quindi quella delle ultime k colonne che è non derivata si esprimerà, a meno di un fattore costante, per mezzo di quella tra le prime $n - k$ colonne della matrice di partenza che non figura nel minore che si considera; p. es. per $i = 1$, derivando le ultime $k - 1$ colonne della matrice

$$\| \mathbf{u}_2(x, \lambda_\nu), \ldots, \mathbf{u}_{n-k}(x, \lambda_\nu), \mathbf{u}_{n-k+1}(x, \lambda_\nu), \ldots, \mathbf{u}_n(x, \lambda_\nu) \|$$

si ha, per $x = \xi$,

$$\| \mathbf{u}_2(\xi, \lambda_\nu), \ldots, \mathbf{u}_{n-k}(\xi, \lambda_\nu), c_1^{(1)}\mathbf{u}_1(\xi, \lambda_\nu), \mathbf{u}'_{n-k+2}(\xi, \lambda_\nu), \ldots, \mathbf{u}'_n(\xi, \lambda_\nu) \|$$

i cui minori d'ordine $n - 1$ differiscono solo per un fattore costante dai corrispondenti minori dedotti, come sopra, da $\mid U_{hi}(x, \lambda_\nu) \mid$ con $i = n - k + 1$ e $h = 1, 2, \ldots, n$. In definitiva si hanno da imporre solo le condizioni

$$\Big(\sum_1^n{}_h \mid U_{hi}(x, \lambda_\nu) \mid^{(k-1)} y_h(x)\Big)_{x=\xi} = 0 \quad \text{per} \quad i = n - k + 1, \ldots, n.$$

Ciò premesso, è di immediata dimostrazione il seguente:

Teorema di minimo. *Siano $x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}, \ldots, x_\nu^{(\nu)}$ i punti di $a < x \leqslant b$ ove non è invertibile la matrice $U(x, \lambda_\nu)$. Indichiamo con Γ_ν l'insieme dei vettori* $\mathbf{y}$ *dotati di derivata continua soddisfacenti le condizioni:*

1) *sono nulli in a e in b;*

2) *soddisfano la condizione $\Big(\sum_1^n{}_k \mid U_{ki}(x, \lambda_\nu) \mid y_k(x)\Big)_{x=\xi} = 0$ per un opportuno valore di i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ se ξ è un punto $x^{(\nu)}$ semplice;*

3) *soddisfano la condizione $\Big(\sum_1^n{}_k \mid U_{ki}(x, \lambda_\nu) \mid' y_k(x)\Big)_{x=\xi} = 0$ per due opportuni valori di i se ξ è un punto $x^{(\nu)}$ doppio; ecc.;*

4) *soddisfano le n condizioni $y_1(\xi) = 0$, $y_2(\xi) = 0, \ldots, y_n(\xi) = 0$ se ξ è un punto $x^{(\nu)}$ n-plo.*

Ebbene riesce

$$\frac{\int_a^b (A\mathbf{y}'\times\mathbf{y}' - 2C\mathbf{y}'\times\mathbf{y} + P\mathbf{y}\times\mathbf{y})\,dx}{\int_a^b Q\mathbf{y}\times\mathbf{y}\,dx} \geqslant \lambda_\nu \tag{5}$$

e il rapporto al primo membro raggiunge il minimo in Γ_ν *per* $\mathbf{y} = \sum_1^p {}_i\, a_i\mathbf{y}_i^{(\nu)}$ *essendo* $a_1, a_2, \ldots, a_p$ *delle costanti arbitrarie e* $\mathbf{y}_1^{(\nu)}, \mathbf{y}_2^{(\nu)}, \ldots, \mathbf{y}_p^{(\nu)}$ *p autosoluzioni linearmente indipendenti corrispondenti all'autovalore* λ_ν*, supposto che questo sia di molteplicità p, cioè sia p. es.* $\lambda_{\nu-p} < \lambda_{\nu-p+1} = \lambda_{\nu-p+2} = \ldots = \lambda_\nu < \lambda_{\nu+1}$. La (2), valida per $\lambda = \lambda_\nu$, su tutto (a, b), una volta integrata tra a e b fornisce

$$I_\nu(\mathbf{y}) = \int_a^b (A\mathbf{y}'\times\mathbf{y}' - 2C\mathbf{y}'\times\mathbf{y} + (P - \lambda_\nu Q)\mathbf{y}\times\mathbf{y})\,dx \geqslant 0,$$

il segno di eguaglianza sussistendo solo se $\mathbf{y}$ è un'autosoluzione corrispondente all'autovalore λ_ν.

Tenendo presente che

$$\int_a^b Q\mathbf{y}\times\mathbf{y}\,dx > 0,$$

si deduce subito l'asserto.

3. – Come nel caso di una sola equazione ordinaria del secondo o del quarto ordine autoaggiunta, la precedente proprietà di minimo può essere formulata indipendentemente dalla conoscenza dei punti $x^{(\nu)}$, così anche nel caso di un sistema si presenta la stessa possibilità. Premettiamo allo scopo il seguente lemma:

Se $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{\nu-1}$ *sono i primi* ν *autovalori con* $\lambda_{\nu-1} < \lambda_\nu$*, e* $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{\nu-1}$ *le corrispondenti autosoluzioni, non esiste nessuna combinazione lineare a coefficienti costanti non tutti nulli di queste ultime,* $\mathbf{y} = \sum_0^{\nu-1} {}_i\, c_i\mathbf{y}_i$*, nulla in a e in b e che nei punti* $x^{(\nu)}$ *soddisfi le condizioni specificate precedentemente.*

L'ipotesi che sia $\lambda_{\nu-1} < \lambda_\nu$ è ovviamente motivata dal fatto che se fosse $\lambda_{\nu-h} = \lambda_{\nu-h+1} = \ldots = \lambda_\nu$, la $\sum_{\nu-h}^{\nu-1} {}_i\, c_i\mathbf{y}_i$ verificherebbe le condizioni del teorema precedente per dei coefficienti c_i costanti arbitrari.

Nelle ipotesi specificate $\mathbf{y}$ è un vettore dell'insieme Γ_ν onde dovrebbe essere

$$I_\nu(\mathbf{y}) = \int_a^b (A\mathbf{y}' \times \mathbf{y}' - 2C\mathbf{y}' \times \mathbf{y} + (P - \lambda_\nu Q)\mathbf{y} \times \mathbf{y})\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

e quindi

$$\sum_{0}^{\nu-1}{}_{ij}\, c_i c_j \int_a^b (A\mathbf{y}_i' \times \mathbf{y}_j' - 2C\mathbf{y}_i' \times \mathbf{y}_j + (P - \lambda_\nu Q)\mathbf{y}_i \times \mathbf{y}_j)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

da cui

$$\sum_{0}^{\nu-1}{}_{i}\, c_i^2 \int_a^b (A\mathbf{y}_i' \times \mathbf{y}_i' - 2C\mathbf{y}_i' \times \mathbf{y}_i + (P - \lambda_\nu Q)\mathbf{y}_i \times \mathbf{y}_i)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

tenendo presente che è

$$\int_a^b (A\mathbf{y}_i' \times \mathbf{y}_j' - C\mathbf{y}_i' \times \mathbf{y}_j - C\mathbf{y}_j' \times \mathbf{y}_i + (P - \lambda_\nu Q)\mathbf{y}_i \times \mathbf{y}_j)\,\mathrm{d}x = 0$$

come si deduce dalla $(A\mathbf{y}_i' + C\mathbf{y}_i)' + C\mathbf{y}_i' - (P - \lambda_i Q)\mathbf{y}_i = 0$ moltiplicata scalarmente per $\mathbf{y}_j$, indi integrata tra a e b e osservando che, essendo $\mathbf{y}_i$ e $\mathbf{y}_j$ autosoluzioni distinte, è

$$\int_a^b Q\mathbf{y}_i \times \mathbf{y}_j\,\mathrm{d}x = 0$$

e quindi è lecito sostituire $\lambda_\nu \mathbf{y}_i \times \mathbf{y}_j$ a $\lambda_i \mathbf{y}_i \times \mathbf{y}_j$ sotto il segno d'integrale. D'altra parte è

$$\int_a^b (A\mathbf{y}_i' \times \mathbf{y}_i' - 2C\mathbf{y}_i' \times \mathbf{y}_i + (P - \lambda_i Q)\mathbf{y}_i \times \mathbf{y}_i)\,\mathrm{d}x = 0$$

onde

$$\sum_{0}^{\nu-1}{}_{i}\, (\lambda_i - \lambda_\nu) c_i^2 \int_a^b Q\mathbf{y}_i \times \mathbf{y}_i\,\mathrm{d}x \geqslant 0\,.$$

Ma

$$\int_a^b Q\mathbf{y}_i \times \mathbf{y}_i \, dx > 0 , \qquad \lambda_i - \lambda_\nu < 0 ,$$

onde la precedente è compatibile col segno di eguaglianza solo se $c_i = 0$ per $i = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1$.

Ciò premesso, passiamo alla *nuova formulazione del teorema di minimo:*

Sia Γ'_ν *l'insieme dei vettori* $\mathbf{y}$, *dotati di derivata prima continua, nulli in* a *e in* b, *soddisfacenti le condizioni di ortogonalità rispetto alla matrice peso* Q

$$\int_a^b Q\mathbf{y} \times \mathbf{y}_0 \, dx = 0 , \quad \int_a^b Q\mathbf{y} \times \mathbf{y}_1 \, dx = 0 , \ldots, \quad \int_a^b Q\mathbf{y} \times \mathbf{y}_{\nu-1} \, dx = 0$$

nell'ipotesi che sia $\lambda_{\nu-1} < \lambda_\nu$. *L'integrale* $I_\nu(\mathbf{y})$ *ha in* Γ'_ν *per minimo lo zero che consegue quando e solo quando*

$$\mathbf{y} = \sum_0^{p-1}{}_i \, a_i \mathbf{y}_{\nu+1} ,$$

essendo le a_i *delle costanti arbitrarie, nell'ipotesi che sia* $\lambda_\nu = \lambda_{\nu+1} = \ldots = \lambda_{\nu+p-1}$.

Cominciamo col provare che anche se $\mathbf{y}$ non appartiene all'aggregato Γ_ν, ciononostante si possono determinare le costanti c_i in modo che il vettore

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{y} + \sum_0^{\nu-1}{}_i \, c_i \mathbf{y}_i$$

appartenga a tale aggregato.

Indichiamo con

$$\xi_{k,1} , \quad \xi_{k,2} , \quad \ldots , \quad \xi_{k,\nu_k}$$

i punti $x^{(\nu)}$ k-pli, essendo $k = 1, 2, \ldots, n$ e $\sum_1^n{}_k \, k\nu_k = \nu$. Le condizioni da imporre sono:

$$\sum_1^n{}_k \, | U_{ki} | \, \eta_k = 0$$

per un opportuno valore di i, in ciascuno dei punti $\xi_{1,1}, \ldots, \xi_{1,\nu_1}$;

$$\sum_1^n{}_k \, | U_{ki} |' \, \eta_k = 0$$

per due opportuni valori di i, in ciascuno dei punti $\xi_{2,1}, \ldots, \xi_{2,\nu_2}$; ecc.;

$$\eta_1 = \eta_2 = \ldots = \eta_n = 0$$

in ciascuno dei punti $\xi_{n,1},\ldots,\ \xi_{n,\nu_n}$; si ha con ciò il sistema di $\nu_1 + 2\nu_2 + \ldots + n\nu_n = \nu$ equazioni lineari non omogenee nelle incognite $c_0,\ c_1,\ldots,\ c_{\nu-1}$:

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_{0}^{\nu-1}{}_h \left(\sum_{1}^{n}{}_k \mid U_{ki} \mid y_{kh}\right)_{x=\xi_{1,l}} c_h = -\left(\sum_{1}^{n}{}_k \mid U_{ki} \mid y_k\right)_{x=\xi_{1,l}} \\ \qquad \text{per } l = 1, 2,\ldots, \nu_1 \text{ e, in corrispondenza a ogni } l, \text{ per un opportuno valore di } i; \\ \sum_{0}^{\nu-1}{}_h \left(\sum_{1}^{n}{}_k \mid U_{ki} \mid' y_{kh}\right)_{x=\xi_{2,l}} c_h = -\left(\sum_{1}^{n}{}_k \mid U_{ki} \mid' y_k\right)_{x=\xi_{2,l}} \\ \qquad \text{per } l = 1, 2,\ldots, \nu_2 \text{ e, in corrispondenza a ogni } l, \text{ per due opportuni valori di } i; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{0}^{\nu-1}{}_h \left(\sum_{1}^{n}{}_k \mid U_{ki} \mid^{(n-1)} y_{kh}\right)_{x=\xi_{n,l}} c_h = -\left(\sum_{1}^{n}{}_k \mid U_{ki} \mid^{(n-1)} y_k\right)_{x=\xi_{n,l}} \\ \qquad \text{per } l = 1, 2,\ldots, \nu_n \text{ e per } i = 1, 2,\ldots, n; \end{array}\right.$$

indicando con $y_{1h},\ y_{2h},\ldots,\ y_{nh}$ le componenti dell'autosoluzione $\mathbf{y}_h$. Ora il determinante dei coefficienti delle c_h è $\neq 0$; infatti in caso contrario sarebbe compatibile il sistema omogeneo associato al precedente; ma allora esisterebbe una n-pla di costanti c_h non tutte nulle per cui $\sum_{0}^{\nu-1}{}_h c_h \mathbf{y}_h$ sarebbe un vettore dell'aggregato Γ_ν contro il lemma precedente. Ciò provato, riuscendo $\boldsymbol{\eta}$ un vettore dell'aggregato Γ_ν, sarà

$$I_\nu(\boldsymbol{\eta}) = \int_a^b (A\boldsymbol{\eta}' \times \boldsymbol{\eta}' - 2C\boldsymbol{\eta}' \times \boldsymbol{\eta} + (P - \lambda_\nu Q)\boldsymbol{\eta} \times \boldsymbol{\eta})\, dx \geqslant 0\,,$$

cioè

$$I_\nu(\boldsymbol{\eta}) = \int_a^b \Big[A(\mathbf{y}' + \sum_{0}^{\nu-1}{}_i c_i \mathbf{y}_i') \times (\mathbf{y}' + \sum_{0}^{\nu-1}{}_i c_i \mathbf{y}_i') - 2C(\mathbf{y}' + \sum_{0}^{\nu-1}{}_i c_i \mathbf{y}_i') \times (\mathbf{y} + \sum_{0}^{\nu-1}{}_i c_i \mathbf{y}_i) +$$
$$+ (P - \lambda_\nu Q)(\mathbf{y} + \sum_{0}^{\nu-1}{}_i c_i \mathbf{y}_i) \times (\mathbf{y} + \sum_{0}^{\nu-1}{}_i c_i \mathbf{y}_i)\Big]\, dx \geqslant 0$$

da cui

$$\int_a^b (A\mathbf{y}' \times \mathbf{y}' - 2C\mathbf{y}' \times \mathbf{y} + (P - \lambda_\nu Q)\mathbf{y} \times \mathbf{y})\, dx +$$
$$+ 2 \sum_{0}^{\nu-1}{}_i c_i \int_a^b (A\mathbf{y}' \times \mathbf{y}_i' - C\mathbf{y}' \times \mathbf{y}_i - C\mathbf{y}_i' \times \mathbf{y} + (P - \lambda_\nu Q)\mathbf{y} \times \mathbf{y}_i)\, dx +$$
$$+ \sum_{0}^{\nu-1}{}_{ij} c_i c_j \int_a^b (A\mathbf{y}_i' \times \mathbf{y}_j' - C\mathbf{y}_i' \times \mathbf{y}_j - C\mathbf{y}_j' \times \mathbf{y}_i + (P - \lambda_\nu Q)\mathbf{y}_i \times \mathbf{y}_j)\, dx \geqslant 0\,.$$

Nell'ultima sommatoria, come si è già visto indietro, sono nulli tutti gli integrali corrispondenti a coppie i, j con $i \neq j$. Nella prima sommatoria gli integrali, tenendo presente l'ipotesi $\int_a^b Q\mathbf{y}\times\mathbf{y}_i\,\mathrm{d}x = 0$, diventano

$$\int_a^b (A\mathbf{y}'\times\mathbf{y}_i' - C\mathbf{y}'\times\mathbf{y}_i - C\mathbf{y}_i'\times\mathbf{y} + P\mathbf{y}\times\mathbf{y}_i)\,\mathrm{d}x\ ;$$

ma da $(A\mathbf{y}_i' + C\mathbf{y}_i)' + C\mathbf{y}_i' = (P - \lambda_i Q)\mathbf{y}_i$ moltiplicata scalarmente per $\mathbf{y}$, indi integrata tra a e b, si ottiene

$$\int_a^b (A\mathbf{y}'\times\mathbf{y}_i' - C\mathbf{y}'\times\mathbf{y}_i - C\mathbf{y}_i'\times\mathbf{y} + P\mathbf{y}\times\mathbf{y}_i)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Pertanto si ha

$$I_\nu(\boldsymbol{\eta}) = \int_a^b (A\mathbf{y}'\times\mathbf{y}' - 2C\mathbf{y}'\times\mathbf{y} + (P-\lambda_\nu Q)\mathbf{y}\times\mathbf{y})\,\mathrm{d}x + \\ + \sum_0^{\nu-1}{}_i\, c_i^2 \int_a^b (A\mathbf{y}_i'\times\mathbf{y}_i' - 2C\mathbf{y}_i'\times\mathbf{y}_i + (P-\lambda_\nu Q)\mathbf{y}_i\times\mathbf{y}_i)\,\mathrm{d}x \geqslant 0\,,$$

e poichè

$$\int_a^b (A\mathbf{y}_i'\times\mathbf{y}_i' - 2C\mathbf{y}_i'\times\mathbf{y}_i + (P-\lambda_i Q)\mathbf{y}_i\times\mathbf{y}_i)\,\mathrm{d}x = 0$$

segue

$$I_\nu(\boldsymbol{\eta}) = \int_a^b (A\mathbf{y}'\times\mathbf{y}' - 2C\mathbf{y}'\times\mathbf{y} + (P-\lambda_\nu Q)\mathbf{y}\times\mathbf{y})\,\mathrm{d}x + \\ + \sum_0^{\nu-1}{}_i\, c_i^2(\lambda_i - \lambda_\nu)\int_a^b Q\mathbf{y}_i\times\mathbf{y}_i\,\mathrm{d}x \geqslant 0\,,$$

e, in quanto la sommatoria che figura nell'ultima formula scritta è negativa, si ha a più forte ragione

$$\int_a^b (A\mathbf{y}'\times\mathbf{y}' - 2C\mathbf{y}'\times\mathbf{y} + (P-\lambda_\nu Q)\mathbf{y}\times\mathbf{y})\,\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

il segno eguale sussistendo solo se al posto di $\mathbf{y}$ si pone un'autosoluzione corrispondente all'autovalore λ_ν.

4. – Teorema di massimo-minimo [10]. *Se* $\mathbf{y}$ *è un vettore continuo insieme al suo derivato e nullo in* a *e in* b, *tale che*

$$\int_a^b Q\mathbf{z}_i \times \mathbf{y}\, dx = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, \nu-1),$$

essendo $\mathbf{z}_i$ $(i = 0, 1, \ldots, \nu-1)$ ν *arbitrari vettori continui, il rapporto*

$$\frac{\int_a^b (A\mathbf{y}' \times \mathbf{y}' - 2C\mathbf{y}' \times \mathbf{y} + P\mathbf{y} \times \mathbf{y})\, dx}{\int_a^b Q\mathbf{y} \times \mathbf{y}\, dx}$$

è sempre positivo e il suo estremo inferiore $e'(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{\nu-1})$ *è dotato di massimo sull'insieme di tutte le* ν*-ple di vettori* $\mathbf{z}_i$ $(i = 0, 1, \ldots, \nu-1)$ *e tale massimo è l'autovalore* λ_ν.

Poniamo $\mathbf{y} = c_0\mathbf{y}_0 + c_1\mathbf{y}_1 + \ldots + c_\nu\mathbf{y}_\nu$; è possibile determinare le costanti $c_0, \ldots, c_\nu$ in modo da soddisfare le condizioni dell'enunciato (si hanno infatti ν equazioni lineari omogenee nelle $\nu + 1$ incognite $c_0, \ldots, c_\nu$); si ha

$$\int_a^b (A\mathbf{y}' \times \mathbf{y}' - 2C\mathbf{y}' \times \mathbf{y} + P\mathbf{y} \times \mathbf{y})\, dx =$$

$$= \sum_0^\nu{}_k\, c_k^2 \int_a^b (A\mathbf{y}_k' \times \mathbf{y}_k' - 2C\mathbf{y}_k' \times \mathbf{y}_k + P\mathbf{y}_k \times \mathbf{y}_k)\, dx = \sum_0^\nu{}_k\, c_k^2\lambda_k \int_a^b Q\mathbf{y}_k \times \mathbf{y}_k\, dx$$

$$\int_a^b Q\mathbf{y} \times \mathbf{y}\, dx = \sum_0^\nu{}_k\, c_k^2 \int_a^b Q\mathbf{y}_k \times \mathbf{y}_k\, dx$$

e, pensando le autosoluzioni normalizzate $\left(\int_a^b Q\mathbf{y}_k \times \mathbf{y}_k\, dx = 1,\ k = 0, 1, \ldots\right)$, è

$$\frac{\sum_0^\nu{}_k\, c_k^2\lambda_k}{\sum_0^\nu{}_k\, c_k^2} \leqslant \lambda_\nu,$$

il segno di eguaglianza sussistendo solo se $\mathbf{y}$ è un'autosoluzione corrispondente

---

[10] Estensione immediata dell'analogo teorema relativo a una sola equazione ordinaria autoaggiunta del secondo ordine; cfr. R. COURANT und D. HILBERT, *Methoden der Mathematischen Physik*, I, Berlin 1924, cfr. pp. 325-326.

all'autovalore λ_ν il che può avvenire o se $\nu < n$ e $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_\nu$, oppure se $c_0 = c_1 = \ldots = c_i = 0$ essendo $\lambda_i < \lambda_{i+1} = \lambda_{i+2} = \ldots = \lambda_\nu$.

Servendosi del teorema di massimo-minimo si può facilmente dare una prima valutazione asintotica degli autovalori; consideriamo i due sistemi

$$(A\mathbf{y}' + C\mathbf{y})' + C\mathbf{y}' = (P - \lambda Q)\mathbf{y}\,, \qquad (A^*\mathbf{y}' + C^*\mathbf{y})' + C^*\mathbf{y}' = (P^* - \lambda Q^*)\mathbf{y}$$

nell'ipotesi (oltre alle solite singolarmente sui due sistemi) che siano semidefinite positive le due matrici

$$\left\| \begin{matrix} A - A^* & C - C^* \\ C^* - C & P - P^* \end{matrix} \right\|, \qquad Q^* - Q\,;$$

allora

$$\frac{\int_a^b (A^*\mathbf{y}' \times \mathbf{y}' - 2C^*\mathbf{y}' \times \mathbf{y} + P^*\mathbf{y} \times \mathbf{y})\, dx}{\int_a^b Q^*\mathbf{y} \times \mathbf{y}\, dx} \leqslant \frac{\int_a^b (A\mathbf{y}' \times \mathbf{y}' - 2C\mathbf{y}' \times \mathbf{y} + P\mathbf{y} \times \mathbf{y})\, dx}{\int_a^b Q\mathbf{y} \times \mathbf{y}\, dx}$$

e quindi

$$e'^*(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{\nu-1}) \leqslant e'(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{\nu-1})$$

$$\max e'^* \leqslant \max e'\,;$$

ossia

$$\lambda_\nu^* \leqslant \lambda_\nu\,.$$

Poichè $\left\| \begin{matrix} A & C \\ -C & P \end{matrix} \right\|$ è per ipotesi definita positiva, si possono scegliere due numeri positivi α e β in modo che, posto $A^* = \alpha E$, $P^* = \beta E$, $C^* = 0$, la matrice $\left\| \begin{matrix} A - \alpha E & C \\ -C & P - \beta E \end{matrix} \right\|$ sia semidefinita positiva; indi $Q^* = \gamma E$ con $\gamma = \max\limits_{|\mathbf{y}|=1} Q\mathbf{y} \times \mathbf{y}$ (sull'insieme dei vettori di modulo uno). Con ciò il secondo dei sistemi scritti sopra diventa $\alpha\mathbf{y}'' + (\lambda\gamma - \beta)\mathbf{y} = 0$ da cui, per λ abbastanza grande (in modo che sia $\lambda\gamma > \beta$), $\mathbf{y} = \operatorname{sen} \sqrt{\dfrac{\lambda\gamma - \beta}{\alpha}}\,(x - a) \cdot \mathbf{c}$ con $\mathbf{c}$ vettore costante arbitrario. Segue

$$\lambda_\nu^* = \frac{1}{\gamma}\left[\alpha\, \frac{(\nu + 1)^2\pi^2}{(b - a)^2} + \beta\right].$$

Analogamente se $\gamma_1 = \min_{|\mathbf{y}|=1} Q\mathbf{y}\times\mathbf{y}$ e se α_1 e β_1 sono due numeri positivi tali che $\left\|\begin{matrix} \alpha_1 E - A & -C \\ C & \beta_1 E - P \end{matrix}\right\|$ sia semidefinita positiva, si riconosce che

$$\frac{1}{\gamma}\left[\alpha\frac{(\nu+1)^2\pi^2}{(b-a)^2}+\beta\right] \leqslant \lambda_\nu \leqslant \frac{1}{\gamma_1}\left[\alpha_1\frac{(\nu+1)^2\pi^2}{(b-a)^2}+\beta_1\right].$$

Ciò prova che $\lambda_\nu = 0(\nu^2)$ ([11]) (facendo uso del simbolo di LANDAU).

5. – Si può però, analogamente al caso di una sola equazione, precisare il comportamento asintotico degli autovalori.

Allo scopo cominciamo con l'osservare che, operando in (1) la sostituzione $\mathbf{y} = L\mathbf{z}$, ove L rappresenta una matrice funzione di x su (a, b) continua con le derivate prima e seconda, e moltiplicando la trasformata a sinistra per la trasposta $\overline{L}$, si ottiene il sistema autoaggiunto

$$\overline{L}AL\mathbf{z}'' + (\overline{L}A'L + 2\overline{L}AL' + 2\overline{L}CL)\mathbf{z}' + \\ + (\overline{L}AL'' + \overline{L}A'L' + \overline{L}C'L + 2\overline{L}CL' - \overline{L}PL)\mathbf{z} + \lambda\overline{L}QL\mathbf{z} = 0$$

che si può porre nella forma

$$\left(\overline{L}AL\mathbf{z}' + \frac{1}{2}(\overline{L}AL' - \overline{L}'AL + 2\overline{L}CL)\mathbf{z}\right)' + \frac{1}{2}(\overline{L}AL' - \overline{L}'AL + 2\overline{L}CL)\mathbf{z}' + \\ + \frac{1}{2}(\overline{L}AL'' + \overline{L}A'L' + \overline{L}''AL + \overline{L}'A'L + 2\overline{L}CL' - 2\overline{L}'CL - 2\overline{L}PL)\mathbf{z} + \\ + \lambda\overline{L}QL\mathbf{z} = 0\,.$$

Tenendo presente che A e Q sono matrici definite positive, esse, com'è noto, possono essere diagonalizzate con una medesima sostituzione lineare, anzi la prima può essere addirittura ridotta alla matrice unità. Prendendo quindi

---

([11]) Un risultato molto simile a quest'ultimo trovasi in G. A. BLISS e I. J. SCHOENBERG, *On separation, comparison and oscillation theorems for self-adjoint systems of linear second order differential equations*, Am. J. Math. **53** (1931), 781-800. (Per la bibliografia attinente ai sistemi autoaggiunti cfr. *The Calculus of Variations in the large*, American Mathematical Society Colloquium publications, vol. XVIII (1934) di M. MORSE, che dedica il cap. IV (self-adjoint differential equations) ai sistemi autoaggiunti del 2° ordine in generale). I citati AA. arrivano però al risultato detto direttamente dal teorema di confronto tra sistemi autoaggiunti e per un problema di autovalori diverso da quello del presente lavoro; precisamente per λ_m intendono un valore di λ per cui (1)-(3) ammette un sistema coniugato di $m + 1$ punti di cui il primo coincidente con a e l'ultimo con b, per cui esiste un integrale nullo in a e nel secondo di tali punti, uno nullo nel secondo e nel terzo, ecc. Notiamo espressamente che nè nel citato lavoro nè in altri v'è traccia delle proprietà di minimo.

per L la matrice di tale sostituzione sarà $\bar{L}AL = E$, $\bar{L}QL = D$ (matrice diagonale), e quindi il sistema precedente si scriverà

$$(1') \qquad (\mathbf{z}' + C_1\mathbf{z}) + C_1\mathbf{z}' = (P_1 - \lambda D)\mathbf{z} .$$

Ci limitiamo a considerare il caso che i valori caratteristici $\rho_1(x), \rho_2(x), \ldots, \rho_n(x)$ (tutti positivi) costituenti lo spettro della matrice $A^{-1}Q$ siano tutti distinti su (a, b); essi saranno gli elementi della matrice diagonale D e la matrice L sarà la matrice $\| l_{hk} \|$ per cui

$$l_{rm}^2 = \Gamma_{rr}(\rho_m) \Big/ \frac{\partial\Gamma(\rho_m)}{\partial\rho} , \qquad l_{rm} l_{sm} = \Gamma_{rs}(\rho_m) \Big/ \frac{\partial\Gamma(\rho_m)}{\partial\rho} ,$$

essendo Γ il $| A\rho - Q |$ e Γ_{hk} il complemento algebrico dell'elemento di Γ comune alla riga h-ma e alla colonna k-ma [12]. È chiaro però che alle ipotesi fatte inizialmente su A e Q bisognerà aggiungere l'ipotesi che esse abbiano derivate seconde continue; allora per il teorema di DINI sulle funzioni implicite anche le radici $\rho_i(x)$ saranno funzioni continue con le derivate prime e seconde e quindi la matrice L soddisferà la condizione specificata sopra di essere continua con la derivata prima e seconda.

Ricordiamo ora che, data l'equazione

$$z'' + \lambda\rho(x)z = 0 , \qquad \rho(x) > 0 \quad \text{su} \quad (a, b) , \qquad z(a) = z(b) = 0$$

è

$$\lambda_\nu = \frac{(\nu + 1)^2\pi^2}{\left(\int_a^b \sqrt{\rho(x)}\, dx \right)^2} + \alpha(\nu)$$

con $\alpha(\nu)$ una quantità che si mantiene limitata per $\nu \to \infty$ [13].

Cominciamo col supporre che il sistema (1′) si riduca a

$$\mathbf{z}'' + \lambda D\mathbf{z} = 0 ;$$

la successione degli autovalori $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_\nu, \ldots$ si otterrà allora costruendo una successione monotona non decrescente coi termini delle successioni $\lambda_0^{(i)}, \lambda_1^{(i)}, \ldots$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ degli autovalori relativi alle equazioni $z_i'' + \lambda\rho_i(x)z_i = 0$. Ebbene

$$(6) \qquad \lim_{\nu\to\infty} \frac{\lambda_\nu}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{\left(\sum_1^n{}_i \int_a^b \sqrt{\rho_i}\, dx \right)^2} .$$

---

[12] Cfr. p. es. F. BRIOSCHI, *Opere*, I, p. 329.

[13] Cfr. p. es. G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, I, Bologna 1941, pp. 223-231.

Per provare ciò, consideriamo le due successioni p, $2p$, $3p$,...; q, $2q$, $3q$,..., con p e q numeri reali positivi; sia p. es. $q > p$ e precisamente $q = kp + r$ con k numero intero positivo e $0 \leqslant r \leqslant p$. Ordinando in un'unica successione non decrescente si ha

$$p,\ 2p,\ \ldots,\ kp,\ q,\ (k+1)p,\ \ldots .$$

I termini $\leqslant \nu q$ sono in numero di $(k+1)\nu + \left[\frac{\nu r}{p}\right]$, indicando con $\left[\frac{\nu r}{p}\right]$ il più grande intero contenuto in $\frac{\nu r}{p}$, e precisamente

$$q,\ 2q,\ \ldots,\ \nu q\ ;\quad p,\ 2p,\ \ldots,\ \nu kp,\ (\nu k+1)p,\ \ldots,\ \left(\nu k + \left[\frac{\nu r}{p}\right]\right)p\ .$$

Ora

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu q}{(k+1)\nu + \left[\frac{\nu r}{p}\right]} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu q}{(k+1)\nu + \frac{\nu r}{p}} = \frac{pq}{p+q}\ .$$

D'altra parte tra νq e $(\nu+1)q$ sono compresi i termini

$$\left(\nu k + \left[\frac{\nu r}{p}\right] + 1\right)p,\ \ldots,\ \left((\nu+1)k + \left[\frac{(\nu+1)r}{p}\right]\right)p,$$

che sono in numero di k oppure $k+1$ secondochè $\left[\frac{(\nu+1)r}{p}\right] = \begin{cases} \left[\frac{\nu r}{p}\right] \\ \left[\frac{\nu r}{p}\right] + 1 \end{cases}$; e poichè per $i \leqslant k$ si ha

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\left(\nu k + \left[\frac{\nu r}{p}\right] + i\right)p}{(k+1)\nu + \left[\frac{\nu r}{p}\right] + i} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu k + \frac{\nu r}{p} + i}{(k+1)\nu + \frac{\nu r}{p} + i} = \frac{pq}{p+q},$$

segue che, date le due successioni

$$1/p,\ 2/p,\ \ldots,\ \nu/p,\ \ldots\ ;\quad 1/q,\ 2/q,\ \ldots,\ \nu/q,\ \ldots,$$

se si costruisce con i loro termini una successione a_1, a_2,... non decrescente si ha $\lim_{\nu\to\infty} \frac{a_\nu}{\nu} = \frac{1}{p+q}$. Analogamente, per induzione, se, anzichè da due, si parte da n successioni.

Pertanto, considerate le successioni

$$\left\{ \frac{\nu^2\pi^2}{\left(\int_a^b \sqrt{\rho_i}\, dx\right)^2} \right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

e ordinati i termini di esse in una successione non decrescente b_1, b_2,..., sarà

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{b_\nu}{\nu^2}=\frac{\pi^2}{\left(\sum_1^n{}_i\int_a^b\sqrt{\rho_i}\,\mathrm{d}x\right)^2}\,.$$

È vero che le successioni da considerare sono quelle degli autovalori $\{\lambda_\nu^{(i)}\}$, cioè

$$\left\{\frac{\nu^2\pi^2}{\left(\int_a^b\sqrt{\rho_i}\,\mathrm{d}x\right)^2}+\alpha_i(\nu)\right\},\qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

e non le successioni

$$\left\{\frac{\nu^2\pi^2}{\left(\int_a^b\sqrt{\rho_i}\,\mathrm{d}x\right)^2}\right\}\qquad (i=1,2,\ldots,n);$$

ma il risultato è il medesimo come ci si convince se anzichè considerare le successioni p, $2p$,...; q, $2q$,..., come sopra, si considerano le $p+a_1$, $2p+a_2$,...; $q+\alpha_1$, $2q+\alpha_2$,..., con $|a_i|\leqslant l$, $|\alpha_i|\leqslant l$ $(i=1,2,\ldots)$ e osservando che, ordinando i termini di queste due successioni in un'unica successione non decrescente, $\nu q+\alpha_\nu$ sarà preceduto al più da $(k+1)\nu+\left[\frac{\nu r}{p}\right]+s$ e almeno da $(k+1)\nu+\left[\frac{\nu r}{p}\right]-s$ termini, essendo $(s+1)p>2l\geqslant sp$ (pensando una volta le α_i tutte eguali ad l e le a_i tutte eguali a $-l$, e una seconda volta il contrario), ecc..

Passiamo ora al caso generale in cui le matrici C_1 e P_1 non siano identicamente nulle.

Due integrali fondamentali di $z_i''+\lambda\rho_i(x)z_i=0$ sono

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\int_a^x\sqrt{\rho_i(\xi)}\,\mathrm{d}\xi\right)}{\sqrt[4]{\rho_i(x)}}+\frac{\omega_i(x,\lambda)}{\sqrt{\lambda}},\qquad \frac{\cos\left(\sqrt{\lambda}\int_a^x\sqrt{\rho_i(\xi)}\,\mathrm{d}\xi\right)}{\sqrt[4]{\rho_i(x)}}+\frac{\overline{\omega}_i(x,\lambda)}{\sqrt{\lambda}},$$

essendo $\omega_i(x,\lambda)$, $\overline{\omega}_i(x,\lambda)$ funzioni limitate su (a,b) per $\lambda>$ di un certo numero positivo $\overline{\lambda}$, le cui derivate sono

$$\sqrt{\lambda}\left[\sqrt[4]{\rho_i(x)}\cos\left(\sqrt{\lambda}\int_a^x\sqrt{\rho_i(\xi)}\,\mathrm{d}\xi\right)+\frac{\Omega_i(x,\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\right],$$

$$-\sqrt{\lambda}\left[\sqrt[4]{\rho_i(x)}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\int_a^x\sqrt{\rho_i(\xi)}\,\mathrm{d}\xi\right)+\frac{\overline{\Omega}_i(x,\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\right],$$

avendo $\Omega_i(x, \lambda)$ e $\overline{\Omega}_i(x, \lambda)$ lo stesso significato di $\omega_i(x, \lambda)$ e $\overline{\omega}_i(x, \lambda)$. Poniamo

$$Z_1 \equiv \left\| \begin{matrix} \dfrac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\int_a^x \sqrt{\rho_1}\,d\xi\right)}{\sqrt[4]{\rho_1}} + \dfrac{\omega_1(x, \lambda)}{\sqrt{\lambda}}, & \dots, & 0 \\ \dots\dots & & \\ 0 & \dots, & \dfrac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\int_a^x \sqrt{\rho_n}\,d\xi\right)}{\sqrt[4]{\rho_n}} + \dfrac{\omega_n(x, \lambda)}{\sqrt{\lambda}} \end{matrix} \right\|,$$

$$Z_2 \equiv \left\| \begin{matrix} \dfrac{\cos\left(\sqrt{\lambda}\int_a^x \sqrt{\rho_1}\,d\xi\right)}{\sqrt[4]{\rho_1}} + \dfrac{\overline{\omega}_1(x, \lambda)}{\sqrt{\lambda}}, & \dots, & 0 \\ \dots\dots & & \\ 0 & \dots, & \dfrac{\cos\left(\sqrt{\lambda}\int_a^x \sqrt{\rho_n}\,d\xi\right)}{\sqrt[4]{\rho_n}} + \dfrac{\overline{\omega}_n(x, \lambda)}{\sqrt{\lambda}} \end{matrix} \right\|.$$

L'integrale generale del sistema

$$\mathbf{z}'' + \lambda D\mathbf{z} = 0 \tag{7}$$

è

$$\mathbf{z} = Z_1\boldsymbol{\alpha} + Z_2\boldsymbol{\beta}\,.$$

Determiniamo ora i vettori $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$, pensati funzioni di x, in modo da soddisfare il sistema (1'), seguendo il ben noto procedimento della variazione delle costanti; allo scopo imponiamo le condizioni

$$Z_1\boldsymbol{\alpha}' + Z_2\boldsymbol{\beta}' = 0\,, \qquad Z_1'\boldsymbol{\alpha}' + Z_2'\boldsymbol{\beta}' = P_1\mathbf{z} - 2(C_1\mathbf{z})' + C_1'\mathbf{z}$$

da cui, osservando che la matrice $Z_2Z_1' - Z_2'Z_1$ è certamente invertibile per λ abbastanza grande poichè

$$|\, Z_2Z_1' - Z_2'Z_1 \,| = \prod_{1}^{n}{}_i \left\{ \left(\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda}\int_a^x \sqrt{\rho_i}\,d\xi\right)}{\sqrt[4]{\rho_i}} + \frac{\overline{\omega}_i(x, \lambda)}{\sqrt{\lambda}} \right) \sqrt{\lambda} \,\times \right.$$

$$\times \left[\sqrt[4]{\rho_i}\cos\left(\sqrt{\lambda}\int_a^x \sqrt{\rho_i}\,d\xi\right) + \frac{\Omega_i(x, \lambda)}{\sqrt{\lambda}} \right] +$$

$$+\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\int_a^x\sqrt{\rho_i}\,d\xi\right)}{\sqrt[4]{\rho_i}}+\frac{\omega_i(x,\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\right)\sqrt{\lambda}\times$$

$$\left.\times\left[\sqrt[4]{\rho_i}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\int_a^x\sqrt{\rho_i}\,d\xi\right)+\frac{\overline{\Omega}_i(x,\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\right]\right\}\sim\lambda^{n/2},$$

si ha

$$\boldsymbol{\alpha}'=(Z_2Z_1'-Z_2'Z_1)^{-1}Z_2[P_1\mathbf{z}-2(C_1\mathbf{z})'+C_1'\mathbf{z}]\,,$$
$$\boldsymbol{\beta}'=-(Z_2Z_1'-Z_2'Z_1)^{-1}Z_1[P_1\mathbf{z}-2(C_1\mathbf{z})'+C_1'\mathbf{z}]\,,$$

da cui, osservando che per la (7) è

$$(Z_2Z_1'-Z_2'Z_1)'=Z_2Z_1''-Z_2''Z_1=0$$

(tenendo presente che le matrici Z_1 e Z_2 sono permutabili nel prodotto, in quanto diagonali), eseguita un'integrazione per parti e tenuta presente la regola di derivazione della reciproca di una matrice, si ha

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\mu}-2[(Z_2Z_1'-Z_2'Z_1)^{-1}Z_2C_1\mathbf{z}]_a^x+\int_a^x(Z_2Z_1'-Z_2'Z_1)^{-1}[Z_2(P_1+C_1')+2Z_2'C_1]\mathbf{z}\,dx,$$

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\nu}+2[(Z_2Z_1'-Z_2'Z_1)^{-1}Z_1C_1\mathbf{z}]_a^x-\int_a^x(Z_2Z_1'-Z_2'Z_1)^{-1}[Z_1(P_1+C_1')+2Z_1'C_1]\mathbf{z}\,dx,$$

essendo $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\nu}$ due vettori costanti arbitrari. Infine, tenendo presente che anche $(Z_2Z_1'-Z_2'Z_1)^{-1}$ è una matrice diagonale (e quindi permutabile con Z_1 e Z_2) si riconosce che ogni integrale di (1'), nullo per $x=a$, soddisfa l'equazione integrale

$$\mathbf{z}=Z_1\boldsymbol{\mu}+Z_1\int_a^x(Z_2Z_1'-Z_2'Z_1)^{-1}[Z_2(P_1+C_1')+2Z_2'C_1]\mathbf{z}\,dx-$$
$$-Z_2\int_a^x(Z_2Z_1'-Z_2'Z_1)^{-1}[Z_1(P_1+C_1')+2Z_1'C_1]\mathbf{z}\,dx.$$

Indicando con $V(x,\lambda)$ la matrice le cui colonne sono costituite dalle componenti dei vettori $\mathbf{z}$ soluzioni della precedente equazione quando per $\boldsymbol{\mu}$ si assumono i vettori $(1,0,\dots,0)$, $(0,1,0,\dots,0)$,..., $(0,0,\dots,0,1)$, si ha

$$V=Z_1(x)+2\int_a^x[Z_2(t)Z_1'(t)-Z_2'(t)Z_1(t)]^{-1}[Z_1(x)Z_2'(t)-Z_2(x)Z_1'(t)]C_1(t)V(t)\,dt+$$
$$+\int_a^x[Z_2(t)Z_1'(t)-Z_2'(t)Z_1(t)]^{-1}[Z_1(x)Z_2(t)-Z_2(x)Z_1(t)][P_1(t)+C_1'(t)]V(t)\,dt$$

ove, per brevità, si è esplicitato solo la variabile x o t, pur essendo Z_1, Z_2, V funzioni anche di λ. Ora è

$$[Z_2(x)Z_1'(x) - Z_2'(x)Z_1(x)]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(E + \frac{H(x, \lambda)}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

essendo $H(x, \lambda)$ una matrice diagonale a modulo limitato per $a \leqslant x \leqslant b$ e $\lambda >$ di un certo $\bar{\lambda}$;

$$\begin{aligned}
&[Z_2(t)Z_1'(t) - Z_2'(t)Z_1(t)]^{-1}[Z_1(x)Z_2'(t) - Z_2(x)Z_1'(t)] = \\
&\quad = - D^{1/2}(t)\left(E + \frac{H(t, \lambda)}{\sqrt{\lambda}}\right)\left[Z_1(x)\left(Z_1(t) + \frac{K_1(t, \lambda)}{\sqrt{\lambda}}\right) + Z_2(x)\left(Z_2(t) + \frac{K_2(t, \lambda)}{\sqrt{\lambda}}\right)\right] = \\
&\quad = - D^{1/2}(t)[Z_1(x)Z_1(t) + Z_2(x)Z_2(t)] + \frac{K(x, t, \lambda)}{\sqrt{\lambda}},
\end{aligned}$$

essendo $K_1(x, \lambda)$, $K_2(x, \lambda)$ matrici dello stesso tipo di $H(x, \lambda)$ e analogamente $K(x, t, \lambda)$ una matrice a modulo limitato per $a \leqslant {x \atop t} \leqslant b$, $\lambda > \bar{\lambda}$; perciò

$$\begin{aligned}
V = Z_1(x) - 2\int_a^x D^{1/2}(t)[Z_1(x)Z_1(t) + Z_2(x)Z_2(t)]C_1(t)V(t)\,dt + \\
+ \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_a^x \left\{\left(E + \frac{H(t, \lambda)}{\sqrt{\lambda}}\right)[Z_1(x)Z_2(t) - Z_1(t)Z_2(x)][P_1(t) + C_1'(t)] + \right. \\
\left. + 2K(x, t, \lambda)C_1(t)\right\} V(t)\,dt\,.
\end{aligned}$$

Introducendo sotto il segno di integrale l'espressione di V, si ha

$$\begin{aligned}
V = Z_1(x) - 2\int_a^x D^{1/2}(t)[Z_1(x)Z_1(t) + Z_2(x)Z_2(t)]C_1(t)Z_1(t)\,dt + \\
+ 4\int_a^x D^{1/2}(t)[Z_1(x)Z_1(t) + Z_2(x)Z_2(t)]C_1(t)\left(\int_a^t D^{1/2}(\tau)[Z_1(t)Z_1(\tau) + \right. \\
\left. + Z_2(t)Z_2(\tau)]C_1(\tau)V(\tau)\,d\tau\right)dt + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_a^x ([\ldots.] + [\ldots.]V(t))\,dt
\end{aligned}$$

dove le $[\ldots.]$ stanno ad indicare somme di matrici a modulo limitato per $a \leqslant {x \atop t} \leqslant b$, $\lambda > \bar{\lambda}$. Ora

$$Z_1(x)Z_1(t) + Z_2(x)Z_2(t) = D^{-1/4}(x)D^{-1/4}(t)D_c(x - t, \lambda) + \frac{M(x, t, \lambda)}{\sqrt{\lambda}},$$

ove $M(x, t, \lambda)$ ha il significato più volte specificato e

$$D_c(x-t, \lambda) = \left\| \begin{matrix} \cos\left(\sqrt{\lambda}\int_t^x \sqrt{\rho_i}\,d\xi\right), & \ldots, & 0 \\ \ldots\ldots\ldots & & \\ 0 & \ldots, & \cos\left(\sqrt{\lambda}\int_t^x \sqrt{\rho_n}\,d\xi\right) \end{matrix} \right\|.$$

Il primo integrale a secondo membro dell'ultima equazione scritta è, trascurando addendi costituiti dal prodotto del fattore $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ per matrici limitate,

$$-2D^{-1/4}(x)\int_a^x D^{1/4}(t)D_c(x-t, \lambda)C_1(t)D_s(t-a, \lambda)D^{-1/4}(t)\,dt$$

dove $D_s(t-a, \lambda)$ sta ad indicare la matrice ottenuta dalla $D_c(x-t, \lambda)$ sostituendo i coseni con i seni e x, t rispettivamente con t, a; ogni termine di tale matrice è del tipo

$$-\frac{2}{\sqrt[4]{\rho_i(x)}}\int_a^x \sqrt[4]{\frac{\rho_i(t)}{\rho_j(t)}}\cos\left(\sqrt{\lambda}\int_t^x \sqrt{\rho_i}\,d\xi\right)\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\int_a^t \sqrt{\rho_j}\,d\xi\right)c_{ij}^{(1)}(t)\,dt\,, \qquad i \neq j,$$

onde, indicando con d una costante positiva che superi i moduli delle funzioni

$$\sqrt[4]{\frac{\rho_i(x)}{\rho_j(x)}}\cdot\frac{c_{ij}^{(1)}(x)}{\sqrt{\rho_i(x)}+\sqrt{\rho_j(x)}}\,, \qquad \sqrt[4]{\frac{\rho_i(x)}{\rho_j(x)}}\cdot\frac{c_{ij}^{(1)}(x)}{\sqrt{\rho_i(x)}-\sqrt{\rho_j(x)}} \qquad \text{per} \quad a \leqslant x \leqslant b\,,$$

e dette $v_1(x)$ e $v_2(x)$ le variazioni totali su (a, x) di tali funzioni, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{\rho_i(x)}}\cdot\Big\{(d+v_1(x))\left[\cos\sqrt{\lambda}\left(\int_a^t(\sqrt{\rho_i}+\sqrt{\rho_j})\,d\xi-\int_a^x\sqrt{\rho_i}\,d\xi\right)\right]_{a_1}^{b_1}-$$

$$-(d+v_2(x))\left[\cos\sqrt{\lambda}\left(\int_a^t(\sqrt{\rho_i}-\sqrt{\rho_j})\,d\xi-\int_a^x\sqrt{\rho_i}\,d\xi\right)\right]_{a_2}^{b_2}\Big\}$$

essendo a_1, b_1 e a_2, b_2 due certe coppie di punti dell'intervallo (a, x).

Il secondo integrale a secondo membro nell'ultima equazione scritta, con una inversione dell'ordine delle integrazioni, diventa

$$4\int_a^x\left(\int_\tau^x D^{1/2}(t)[Z_1(x)Z_1(t)+Z_2(x)Z_2(t)]C_1(t)Z_1(t)\,\mathrm{d}t\right)D^{1/2}(\tau)Z_1(\tau)C_1(\tau)V(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,+$$

$$+\,4\int_a^x\left(\int_\tau^x D^{1/2}(t)[Z_1(x)Z_1(t)+Z_2(x)Z_2(t)]C_1(t)Z_2(t)\,\mathrm{d}t\right)D^{1/2}(\tau)Z_2(\tau)C_1(\tau)V(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

onde, ripetendo sugli integrali interni delle considerazioni analoghe a quelle svolte qui sopra, si conclude che

$$V=Z_1(x)+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(W_1(x,\lambda)+\int_a^x W_2(x,t,\lambda)V(t)\,\mathrm{d}t\right),$$

essendo W_1 e W_2 due matrici a modulo limitato del tipo ripetutamente specificato.

Pertanto la matrice integrale $V(x,\lambda)$ ha modulo limitato per $a\leqslant x\leqslant b$, $\lambda>\bar{\lambda}$, e converge a $Z_1(x)$, uniformemente rispetto a x, per $\lambda\to+\infty$. Sarà perciò

$$V(x,\lambda)=\left\|\begin{matrix}\dfrac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\int_a^b\sqrt{\rho_1}\,\mathrm{d}\xi\right)}{\sqrt[4]{\rho_n(x)}}+\alpha_{11}(x,\lambda), & \dots, & \alpha_{1n}(x,\lambda)\\ \dots\dots & & \\ \alpha_{n1}(x,\lambda) & ,\ \dots, & \dfrac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\int_a^x\sqrt{\rho_n}\,\mathrm{d}\xi\right)}{\sqrt[4]{\rho_n(x)}}+\alpha_{nn}(x,\lambda)\end{matrix}\right\|$$

con $\alpha_{ij}(x,\lambda)$ $(i,j=1,2,\dots,n)$ funzioni infinitesime per $\lambda\to+\infty$ (uniformemente rispetto a x) onde gli autovalori del sistema (1') con le condizioni ai limiti $\mathbf{z}(a)=\mathbf{z}(b)=0$ saranno le radici dell'equazione

$$\left|\begin{matrix}\dfrac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\int_a^b\sqrt{\rho_1}\,\mathrm{d}x\right)}{\sqrt[4]{\rho_1(b)}}+\alpha_{11}(b,\lambda), & \dots, & \alpha_{1n}(b,\lambda)\\ \dots\dots & & \\ \alpha_{n1}(b,x) & ,\ \dots, & \dfrac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\int_a^b\sqrt{\rho_n}\,\mathrm{d}x\right)}{\sqrt[4]{\rho_n(b)}}+\alpha_{nn}(b,\lambda)\end{matrix}\right|=0,$$

radici che, com'è noto, si possono ordinare in una successione non decrescente non limitata λ_0, λ_1,..., quella stessa degli autovalori del sistema (1)-(3); tali radici per $\lambda \to \infty$ convergeranno alle radici della equazione

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\int_a^b \sqrt{\rho_1}\, dx\right), & \dots, & 0 \\ \dots\dots\dots & & \\ 0 & , \dots, & \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\int_a^b \sqrt{\rho_n}\, dx\right) \end{vmatrix} = 0,$$

e quindi, per le considerazioni fatte precedentemente nel caso di $C_1 \equiv P_1 \equiv 0$, si può concludere che:

Se le matrici $A(x)$ e $Q(x)$ sono continue con le derivate prima e seconda, e se la matrice $A^{-1}Q$ ha su (a, b) uno spettro costituito da funzioni $\rho_1(x)$, $\rho_2(x)$,..., $\rho_n(x)$ (positive) tutte distinte in ogni punto di (a, b), allora il sistema differenziale (1)-(3) *ammette una successione non decrescente e non limitata di autovalori* λ_0, λ_1 ,..., *per cui*

$$\lim_{\nu \to +\infty} \frac{\lambda_\nu}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{\left(\sum_1^n {}_i \int_a^b \sqrt{\rho_i(x)}\, dx\right)^2}.$$

Le autosoluzioni del sistema (1)-(3) *convergono per* $\lambda \to +\infty$, *uniformemente rispetto a x, ai vettori costituenti le colonne della matrice LZ, essendo*

$$Z \equiv \begin{Vmatrix} \dfrac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\int_a^x \sqrt{\rho_1}\, dx\right)}{\sqrt[4]{\rho_1(x)}}, & \dots, & 0 \\ \dots\dots\dots & & \\ 0 & , \dots, & \dfrac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\int_a^x \sqrt{\rho_n}\, dx\right)}{\sqrt[4]{\rho_n(x)}} \end{Vmatrix} \qquad \lambda = \lambda_0, \lambda_1, \dots$$

ed L la matrice per cui $\overline{L}\dot{A}L = E$ ed $\overline{L}QL$ è una matrice diagonale.

6. – Abbiamo già visto che le autosoluzioni $\mathbf{y}_0$, $\mathbf{y}_1$,..., $\mathbf{y}_\nu$,... costituiscono un sistema di vettori due a due ortogonali rispetto alla matrice peso Q; tale sistema si può pensare normalizzato (sostituendo $\mathbf{y}_i$, $i = 1, 2,...,$ con

$\mathbf{y}_i \Big/ \sqrt{\int_a^b Q\mathbf{y}_i \times \mathbf{y}_i \, dx}\Big)$. Poichè $\mathbf{y}_\nu = L\mathbf{z}_\nu$ (essendo, come già s'è detto, $\mathbf{z}_0$, $\mathbf{z}_1, \ldots$ le autosoluzioni del sistema (1′) con le condizioni ai limiti $\mathbf{z}(a) = \mathbf{z}(b) = 0$) si ha

$$\int_a^b Q\mathbf{y}_\nu \times \mathbf{y}_\nu \, dx = \int_a^b \overline{L}QL\mathbf{z}_\nu \times \mathbf{z}_\nu \, dx =$$

$$= \int_a^b D\mathbf{z} \times \mathbf{z} \, dx \sim \sum_1^n {}_i \int_a^b \rho_i(x) \frac{\operatorname{sen}^2\left(\sqrt{\lambda_\nu} \int_a^x \sqrt{\rho_i} \, d\xi\right)}{\sqrt[4]{\rho_i(x)}} \, dx \sim \frac{1}{2} \sum_1^n {}_i \int_a^b \rho_i^{3/4}(x) \, dx \, .$$

Quindi le autofunzioni normalizzate saranno a modulo limitato per $\lambda_\nu \to +\infty$, uniformemente rispetto a x.

Basandosi su questo risultato, e riconosciuta la completezza del sistema delle autofunzioni, daremo qui di seguito, nelle ipotesi più semplici possibili, un teorema di sviluppo di un vettore continuo in serie di autofunzioni, immediata estensione del ben noto teorema di sviluppo in serie di una funzione continua per le autosoluzioni di una equazione ordinaria autoaggiunta del 2º ordine.

Teorema di completezza. *Un vettore continuo* $\overline{\mathbf{y}}$ *non può essere ortogonale, rispetto alla matrice* Q, *a tutte le autosoluzioni di* (1)-(3) *senza essere identicamente nullo.*

Sia $\mathbf{y}$ un vettore soluzione del sistema

$$(A\mathbf{y}' + C\mathbf{y})' + C\mathbf{y}' = (P - \lambda Q)\mathbf{y} + Q\overline{\mathbf{y}} \qquad \lambda \neq \lambda_0, \lambda_1, \ldots$$

nullo in a e in b. Il teorema dell'alternativa assicura l'esistenza di un tal vettore $\mathbf{y}$ poichè il corrispondente sistema omogeneo non ha soluzioni nulle in a e in b. Si ha

$$(A\mathbf{y}'_\nu + C\mathbf{y}_\nu)' + C\mathbf{y}'_\nu = (P - \lambda_\nu Q)\mathbf{y}_\nu \, .$$

Moltiplicata scalarmente la prima per $\mathbf{y}_\nu$ e la seconda per $\mathbf{y}$, indi integrando su (a, b) e sottraendo, si ha

$$(\lambda - \lambda_\nu) \int_a^b Q\mathbf{y} \times \mathbf{y}_\nu \, dx = \int_a^b Q\overline{\mathbf{y}} \times \mathbf{y}_\nu \, dx$$

e quindi, per l'ipotesi dell'ortogonalità, si ha

$$\int_a^b Q\mathbf{y} \times \mathbf{y}_0 \, dx = \int_a^b Q\mathbf{y} \times \mathbf{y}_1 \, dx = \ldots . = 0 \, .$$

Ma il vettore $\mathbf{y}$ è continuo insieme al suo derivato, onde per il teorema di minimo (nella formulazione del n. 3), riesce

$$\frac{\int_a^b (A\mathbf{y}' \times \mathbf{y}' - 2C\mathbf{y}' \times \mathbf{y} + P\mathbf{y} \times \mathbf{y})\,dx}{\int_a^b Q\mathbf{y} \times \mathbf{y}\,dx} \geqslant \lambda_\nu\,, \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)\,,$$

ciò ch'è assurdo perchè il primo membro è limitato mentre $\lim_{\nu \to +\infty} \lambda_\nu = +\infty$.

Pertanto $\mathbf{y} \equiv 0$ e quindi $\overline{\mathbf{y}} \equiv 0$.

Se $\mathbf{y}$ *è un vettore continuo, nullo in* a *e in* b, *sviluppabile in serie uniformemente convergente di autosoluzioni,* $\mathbf{y} = c_0\mathbf{y}_0 + c_1\mathbf{y}_1 + \ldots + c_\nu\mathbf{y}_\nu + \ldots$, *si ha*

$$c_\nu = \int_a^b Q\mathbf{y}_\nu \times \mathbf{y}\,dx\,.$$

Basta moltiplicare scalarmente per $Q\mathbf{y}$ e integrare tra a e b.

Se la serie

$$\sum_0^\infty{}_\nu\, c_\nu \mathbf{y}_\nu\,, \quad \left(c_\nu = \int_a^b Q\mathbf{y}_\nu \times \mathbf{y}\,dx\right),$$

è uniformamente convergente, la sua somma è $\mathbf{y}$.

Detta $\mathbf{z}$ la somma e posto $\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{z}$, poichè sono tutti nulli i coefficienti di FOURIER di quest'ultimo vettore, per il teorema di completezza è $\mathbf{y} = \mathbf{z}$,

Teorema di sviluppo. *Se* $\mathbf{y}$ *è un vettore continuo insieme al suo derivato, nullo in* a *e in* b, *esso si può sviluppare in serie di* FOURIER *mediante le autosoluzioni del sistema* (1)-(3),

$$\mathbf{y} = c_0\mathbf{y}_0 + c_1\mathbf{y}_1 + \ldots\,, \quad \left(c_k = \int_a^b Q\mathbf{y}_k \times \mathbf{y}\,dx\right).$$

Moltiplicando scalarmente per $\mathbf{y}$ la $(A\mathbf{y}_\nu' + C\mathbf{y}_\nu)' + C\mathbf{y}_\nu' - (P - \lambda_\nu Q)\mathbf{y}_\nu = 0$ e integrando su (a, b) si ha

$$\int_a^b (A\mathbf{y}_\nu' \times \mathbf{y}' - C\mathbf{y}_\nu' \times \mathbf{y} - C\mathbf{y}' \times \mathbf{y}_\nu + P\mathbf{y}_\nu \times \mathbf{y})\,dx = \lambda_\nu c_\nu;$$

ma

$$\int_a^b \Big[A\Big(\mathbf{y} - \sum_0^{\nu-1}{}_k\, c_k\mathbf{y}_k\Big)' \times \Big(\mathbf{y} - \sum_0^{\nu-1}{}_k\, c_k\mathbf{y}_k\Big)' - 2C\Big(\mathbf{y} - \sum_0^{\nu-1}{}_k\, c_k\mathbf{y}_k\Big)' \times \Big(\mathbf{y} - \sum_0^{\nu-1}{}_k\, c_k\mathbf{y}_k\Big) + \\ + P\Big(\mathbf{y} - \sum_0^{\nu-1}{}_k\, c_k\mathbf{y}_k\Big) \times \Big(\mathbf{y} - \sum_0^{\nu-1}{}_k\, c_k\mathbf{y}_k\Big)\Big]\,dx \geqslant 0$$

essendo definita positiva la matrice $\left\| \begin{matrix} A & C \\ -C & P \end{matrix} \right\|$. Sviluppando si ha:

$$\int_a^b (A\mathbf{y}' \times \mathbf{y}' - 2C\mathbf{y}' \times \mathbf{y} + P\mathbf{y} \times \mathbf{y})\, dx -$$

$$-2 \sum_0^{\nu-1}{}_k\, c_k \int_a^b (A\mathbf{y}' \times \mathbf{y}_k' - C\mathbf{y}' \times \mathbf{y}_k - C\mathbf{y}_k' \times \mathbf{y} + P\mathbf{y} \times \mathbf{y}_k)\, dx +$$

$$+ \sum_0^{\nu-1}{}_{hk}\, c_h c_k \int_a^b (A\mathbf{y}_h' \times \mathbf{y}_k' - C\mathbf{y}_h' \times \mathbf{y}_k - C\mathbf{y}_k' \times \mathbf{y}_h + P\mathbf{y}_h \times \mathbf{y}_k)\, dx \geqslant 0,$$

da cui

$$\int_a^b A\mathbf{y}' \times \mathbf{y}' - 2C\mathbf{y}' \times \mathbf{y} + P\mathbf{y} \times \mathbf{y})\, dx \geqslant \sum_0^{\nu-1}{}_k\, \lambda_k c_k^2 .$$

Perciò $\sum_0^{\infty}{}_k\, \lambda_k c_k^2$ è convergente (essendo a termini positivi e somme parziali limitate). Poichè le $\mathbf{y}_k$ sono egualmente limitate e $\lambda_k \to +\infty$ come k^2, esiste un numero positivo d tale che

$$\frac{|\mathbf{y}_k|}{\lambda_k} \leqslant \frac{d}{(k+1)^2}, \qquad a \leqslant x \leqslant b, \quad k = 0, 1, \ldots .$$

Perciò la serie $\sum_0^{\infty}{}_k \dfrac{\mathbf{y}_k}{\lambda_k}$ è totalmente convergente e quindi anche la $\sum_0^{\infty}{}_k \dfrac{\mathbf{y}_k \times \mathbf{y}_k}{\lambda_k}$.

Ora

$$\Big(\sum_{m+1}^{m+p}{}_k\, c_k y_{ki}\Big)^2 \leqslant \sum_{m+1}^{m+p}{}_k\, c_k^2 \lambda_k \sum_{m+1}^{m+p}{}_k \frac{y_{ki}^2}{\lambda_k}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

per la diseguaglianza di LAGRANGE-CAUCHY, onde

$$\Big|\sum_{m+1}^{m+p}{}_k\, c_k \mathbf{y}_k\Big| \leqslant \sqrt{\sum_{m+1}^{m+p}{}_k\, c_k^2 \lambda_k}\ \sqrt{\sum_{m+1}^{m+p}{}_k \frac{\mathbf{y}_k \times \mathbf{y}_k}{\lambda_k}} .$$

I radicali a secondo membro si possono rendere entrambi $< \varepsilon$ (> 0 arbitrario) non appena sia m abbastanza grande, qualunque sia l'intero p e x su (a, b). Segue la convergenza uniforme di $\sum_0^{\infty}{}_k\, c_k \mathbf{y}_k$ e di qui l'asserto.