Ugo Cassina (*)

Il concetto di linea piana e la curva di Peano. (**)

Introduzione.

La scoperta della curva che riempie tutta una regione piana o solida, fatta da Giuseppe Peano nel 1890 — ritenuta da F. Hausdorff « uno dei fatti più mirabili della teoria degli insiemi » — è di quelle destinate a fare epoca nella storia della Matematica. Non solo perchè è stata origine di numerosissimi lavori di matematici insigni delle più diverse nazioni, ma perchè ha sconvolto tutte le idee preconcette sulle nozioni di *linea*, di *superficie* e di *solido*; tanto che — a dirla con A. Schoenflies — « i geometri sentirono come traballare l'arco che portava il loro edificio scientifico »!

Nel presente lavoro, storico divulgativo, premessa una rapida sintesi storica del modo con cui i matematici, prima della scoperta della curva di Peano, avevano creduto di formulare razionalmente i concetti intuitivi di *linea*, di *superficie* e di *solido*, riporterò la definizione analitica data da G. Peano della sua curva e la illustrerò graficamente in due modi, di cui il secondo è forse nuovo.

§ 1. – Il concetto di linea fino alla scoperta di Peano.

1. – Il concetto di linea negli antichi greci (1). È ben noto che i *punti*, le *linee*, le *superficie* ed i *solidi* di cui si occupa il geometra sono enti puramente *ideali*. Ciò è stato già rilevato in modo implicito da Parmenide ed in modo esplicito da Platone, che in un brano della sua *Republica* (VI, 20) scrive:

(*) Professore straordin. della Università di Pavia e incaricato nella Università di Parma. Indirizzo: Via Col Moschin, 9 - Milano (734), Italia.

(**) Lavoro ricevuto il 20-I-1950.

(1) Cfr. U. Cassina, *Linee, superficie, solidi*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, **4**, 18-37 (1930).

«i geometri... si servono di figure visibili e ad esse applicano i loro ragionamenti, sebbene non sia ad esse che loro pensano, ma a quelle di cui queste sono l'immagine»; e da ARISTOTELE, che nella sua *Metaphysica* (992, a 20) dice che «i punti del geometra non sono altro che delle pure *supposizioni geometriche* (γεωμετρικὸν δόγμα)».

Dunque: i *punti*, le *linee*, le *superficie*, i *solidi* di cui si occupa il geometra sono enti puramente *ideali*. È ben vero che per non fare delle inutili logomachie è necessario che il geometra dia agli enti ideali da chiamarsi *punti*, *linee*, *superficie*, ecc., non già dei significati completamente arbitrari, bensì quelli che egli ottiene come idealizzazione, come astrazione dai concetti *materiali* intuitivi indicati con gli stessi vocaboli.

Vediamo allora come sono stati introdotti questi concetti nel più antico trattato sistematico di geometria che a noi sia pervenuto: gli *Elementi* di EUCLIDE, opera la cui celebrità e diffusione in tutto il mondo, ancor oggi, a più di ventidue secoli dalla sua pubblicazione, è quasi senza pari. Nel libro I trovansi le ὅροι seguenti:

1. *Punto è ciò che non ha parti*;
2. *Linea una lunghezza senza larghezza*;
3. *Estremi di una linea son punti*;
5. *Superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza*;
6. *Gli estremi di una superficie sono linee*;
13. *Termine è l'estremo di qualche cosa*;
14. *Figura è ciò che è compreso da uno o più termini*;

e nel libro XI le ὅροι:

1. *Solido è ciò che ha soltanto lunghezza, larghezza ed altezza*;
2. *L'estremo di un solido è una superficie.*

La discussione sopra il significato preciso attribuito da EUCLIDE a queste, ed alle altre proposizioni con cui incomincia i vari libri del suo trattato, dura da secoli e non è ancora finita. Ciò perchè si suol tradurre il vocabolo ὅροι, con cui esse sono designate, con «definizioni» e si vogliono perciò riguardare come delle definizioni matematiche, ed in tal caso esse risultano spesso prive di senso o scorrette.

Se si tien presente però che il vocabolo greco usato di preferenza da ARISTOTELE — pressochè contemporaneo di EUCLIDE — per «definizione» è ὁρισμός, parmi conveniente di seguire G. VACCA (2) e tradurre con *termini* il vocabolo ὅροι; e considerare queste prime pagine come una raccolta di chiari-

(2) G. VACCA, *Euclide, Il I libro degli Elementi*, ed. Sansoni, Firenze, 1916.

menti intorno alle parole tecniche usate nel seguito, chiarimenti analoghi a quelli che possono trovarsi in un dizionario.

Ho detto che queste proposizioni euclidee non possono essere considerate come delle definizioni matematiche. Invero ogni definizione matematica è riducibile ad una eguaglianza del tipo:

$$x = a \,,$$

ove x è l'ente ignoto da definire ed a un'espressione di significato noto. Ora, alcune di queste proposizioni di EUCLIDE, non sono nemmeno traducibili in eguaglianze e quindi non possono essere definizioni. Esse, tutt'al più, possono essere considerate come delle affermazioni di proprietà — cioè dei postulati — relativi ai concetti non definiti di *punto*, di *lunghezza*, di *larghezza*, di *parte*, di *linea*, di *superficie*, di *figura*, ecc..

Ad ogni modo tali proposizioni sono state riprodotte, pressochè tal quali, in tutti i trattati di geometria via via pubblicati attraverso i secoli fino alla seconda metà del secolo scorso. Ciò per la grande influenza del libro dell'Alessandrino e ciò anche perchè esse erano ritenute frutto immediato dell'*astrazione* dalle proprietà dei punti, delle linee e delle superficie *materiali*.

Ma da questo punto di vista meritano di essere ricordate, perchè riprese anche in tempi moderni, altre pseudo-definizioni elleniche degli enti in discorso.

Così in ARISTOTELE (*De anima* I, 4, 409 a 4), ed otto secoli dopo in PROCLO bizantino, si legge che la linea è *la traiettoria di un punto* (ῥύσις σημείου), che *la superficie è la traiettoria d'una linea*, che *il solido è la traiettoria d'una superficie*; le quali proposizioni esprimono dei legami fra i concetti di *punto*, *linea*, *superficie* e *solido* e quello di *movimento*.

E possiamo aggiungere che al posto delle parole tecniche σημείος ed ἐπιφάνεια, che letteralmente significano *segno* ed *apparizione* (o *ciò che si vede*), i matematici preeuclidei ed anche ARISTOTELE fecero uso dei vocaboli στιγμή, che letteralmente significa *puntura* e χροιά o χρόα che significa *pelle* (o *colorito* della pelle).

Il vocabolo greco usato per *solido* è poi στερεός = *solido* (PLATONE, EUCLIDE) o σχῆμα στερεόν = *figura solida* (EUCLIDE).

Se però il concetto di punto geometrico si ha per idealizzazione ed astrazione dal concetto di punto materiale, si deve osservare che il *punto geometrico* — come ente privo di dimensioni — è assolutamente diverso dal *punto materiale*, il quale non potrà mai essere più piccolo della più piccola particella della materia (nucleo, protone, elettrone, ecc.). Quindi, secondo le contemporanee ipotesi sulla costituzione di questa, un *punto materiale* sarà certo più grande di un cubetto avete come lato un milionesimo di milionesimo di milionesimo di metro (cioè di 10^{-18} m).

Ma allora, con un piccolo calcolo mentale, possiamo concludere facilmente che il numero dei punti materiali contenuti nella Terra è minore di 10^{76}. Infatti il volume della Terra è minore di quello del cubo di lato 20000 km $=$ $= 2 \times 10^7$ m, cioè di 8×10^{21} m³, ed a maggior ragione di 10^{22} m³. Ed il volume d'un punto materiale è certo maggiore di quello del cubo di lato 10^{-18} m, cioè di 10^{-54} m³. Ne risulta che il numero dei *punti materiali* della Terra è certo minore di $10^{22}\ \mathrm{m}^3/10^{-54}\ \mathrm{m}^3 = 10^{76}$.

Perciò una linea *materiale*, una superficie *materiale* o un corpo *materiale* non potrà contenere che un numero *finito* di punti *materiali*.

Cosicchè la geometria *fisica* (o naturale) è caratterizzata dal numero *finito* (o tutt'al più dall'infinito *numerabile*); mentre invece la geometria *razionale* è caratterizzata dall'infinito *continuo*.

2. – Il concetto di linea nel secolo decimonono. Nella seconda metà del secolo scorso si è incominciata la revisione critica dei fondamenti della matematica. E si è cercato di dare significato logico preciso alle proposizoni sopra ricordate. Ma, di mano in mano che si procedeva in questo ordine di studi, ci si accorgeva come era difficile conseguire tale intento!

Infatti i risultati più cospicui che via via si venivano ottenendo erano in contraddizione con le immagini tradizionali — le uniche note fino allora — di quegli enti *materiali* che si chiamavano *linee* e *superficie*; ciò, però, voleva soltanto dire che l'idealizzazione fattane era troppo sommaria, e che il farne un'idealizzazione soddisfacente era impresa difficile, assai più di quanto si era immaginato dapprima, tanto che — ancor oggi — non può dirsi condotta a termine.

Così, dopo avere definito esattamente quel che doveva intendersi per *contorno* (o *estremo* o *termine*) di una figura, si pensava con EUCLIDE che il contorno di una figura solida fosse una superficie; e si è notato invece che questo non è sempre vero, perchè esistono delle figure solide il cui contorno è un cubo pieno, ed inoltre esistono delle superficie che non sono il contorno di nessun solido (le cosidette superficie *unilatere*).

Si pensava che ogni linea piana rientrante (o chiusa) fosse decomponibile in due archi, e che avesse la proprietà caratteristica di essere il contorno di due e due sole regioni piane prive di elementi comuni la cui somma (compreso il contorno) fosse l'intero piano, ed invece L. E. BROUWER, nel 1910 [*Math. Ann.*, **68** (1910), p. 422], ha dimostrato che ciò non è sempre vero.

Inoltre, si pensava che un primo carattere discriminante fra linee, superficie e solidi fosse il *numero* dei punti appartenenti ad essi, cioè che il numero dei punti appartenenti ad una linea fosse di gran lunga inferiore a quello dei punti appartenenti ad una superficie o ad un solido; ma, se si generalizza spontaneamente il comune concetto di eguaglianza di numero fra due aggregati materiali di oggetti, cioè essendo u e v due insiemi qualunque di oggetti noi diciamo che essi hanno lo stesso numero di individui quando è possibile stabilire fra u e v una corrispondenza biunivoca senza eccezioni, ecco che GIORGIO CANTOR, nel 1878 (*J. reine ang. Math.*, t. 84, p. 242), ha ottenuto il risultato — a prima vista paradossale — che il numero dei punti di un segmento rettilineo è eguale a quello dei punti di una retta, o di un piano, o di tutti i punti (dello spazio ordinario, o dello spazio ad n dimensioni).

Un'altra proprietà dell'ente intuitivo denominato « linea » (che ho già ricordata) è quella che fa dipendere il concetto di *linea* (ed analogamente quello di *superficie* e di *solido*) dal concetto di *movimento*.

Ed allora, poichè R. DESCARTES ed altri avevano insegnato a rappresentare ogni punto di un piano mediante due numeri (coordinate cartesiane), ed in modo analogo per lo spazio mediante tre numeri, ecco che si credette di potere dare finalmente forma esatta al concetto intuitivo di linea identificandolo con quello di curva *continua*, cioè definendo come *linea piana* (continua) ogni insieme di punti le cui coordinate x, y verificano le equazioni:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \, , \end{cases}$$

ove f e g rappresentano delle *funzioni continue* di t, definite nello stesso intervallo $a \mapsto b$ (cioè per tutti i numeri t minori od eguali di b e maggiori od eguali di a, ove a e b sono numeri reali ed a è minor di b).

In modo analogo una *linea sghemba* (continua) è la totalità dei punti le cui coordinate x, y, z verificano le equazioni:

$$(2) \qquad \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \, , \end{cases}$$

ove f, g, h sono delle *funzioni continue* di t definite in uno stesso intervallo $a \mapsto b$.

Le (1) e (2) diconsi — com'è ben noto — equazioni *parametriche* della linea, piana o sghemba.

In queste definizioni il concetto di *funzione continua* è dunque sostituito a quello di *movimento* intuitivo.

§ 2. – La curva di Peano.

Ciò premesso, ecco la scoperta sensazionale di G. PEANO, esposta in una breve Nota di quattro paginette dei *Mathematische Annalen* del 1890 (vol. 36, pp. 157-160).

G. PEANO aveva trovato le equazioni parametriche di una linea piana continua che riempie un *quadrato* e di una linea sghemba continua che riempie un *cubo*!

L'espressione analitica di tali curve è fondata sull'uso di successioni *infinite* analoghe a quelle che si ottengono quando si scrive un numero sotto forma decimale.

Scegliamo, per esempio, come base di numerazione il numero *tre*, che è la minima base *dispari*, e sia:

$$T = \cdot\, a_1 a_2 \dots a_{2n-1} a_{2n} \dots$$

una successione infinita di *cifre* (in base 3), cioè di numeri 0, 1, 2. Diremo « valore di T » il numero t tale che:

$$t = a_1/3 + a_2/3^2 + \dots + a_n/3^n + \dots ,$$

e « complementare » della cifra a (in base 3) la cifra $2 - a$.

Ora, mediante la successione T, G. PEANO costruisce le due successioni di cifre:

$$X = \cdot\, b_1 b_2 \dots b_n \dots ,$$
$$Y = \cdot\, c_1 c_2 \dots c_n \dots ,$$

ove le cifre sono ottenute con la seguente legge: b_1 è eguale ad a_1 e b_n (se $n > 1$) è eguale ad a_{2n-1} oppure alla sua complementare secondo che la somma delle cifre di posto *pari*, che la precedono (in T) è pari o dispari; e c_n (se $n \geqslant 1$) è eguale ad a_{2n} oppure alla sua complementare secondo che la somma delle cifre di posto *dispari* che la precedono (in T) è pari o dispari.

Mediante T risultano determinate X e Y; viceversa, date X e Y, la T è determinata: infatti le sue cifre successive si possono ottenere con la seguente legge: a_1 è eguale a b_1 e a_{2n-1} (se $n > 1$) è eguale a b_n od alla sua complementare secondo che $c_1 + c_2 + \dots + c_{n-1}$ è pari o dispari; ed a_{2n} (se $a \geqslant 1$) è eguale a c_n oppure alla sua complementare secondo che $b_1 + b_2 + \dots + b_n$ è pari o dispari.

Ora la corrispondenza — che diremo di PEANO — stabilita fra T e la coppia $(X; Y)$ è tale che se T e T' sono due successioni (di cifre in base 3) di forma diversa ma di *valore eguale* ed $(X; Y)$ è la coppia corrispondente a T ed $(X'; Y')$ quella corrispondente a T', allora X ed X' hanno lo stesso valore e lo stesso dicasi di Y ed Y'.

La dimostrazione di ciò è esposta da G. PEANO in modo semplicissimo attraverso le proprietà del simbolo operativo **K**, che trasforma una cifra nella sua complementare; ma noi ci limiteremo a constatarne la verità su esempi:

$$1^\circ) \qquad \begin{aligned} T &= \cdot\, 0\overline{1}0000... = 1/9\,, & T' &= \cdot\, 00\overline{2}222... = 1/9\,,\\ X &= \cdot\, 0\overline{2}2... = 1/3\,, & X' &= \cdot\, 0\overline{2}2... = 1/3\,,\\ Y &= \cdot\, 1\overline{0}0... = 1/3\,, & Y' &= \cdot\, 0\overline{2}2... = 1/3\,; \end{aligned}$$

$$2^\circ) \qquad \begin{aligned} T &= \cdot\, 1\overline{0}0000... = 1/3\,, & T' &= \cdot\, 0\overline{2}2222... = 1/3\,,\\ X &= \cdot\, 1\overline{0}0... = 1/3\,, & X' &= \cdot\, 0\overline{2}2... = 1/3\,,\\ Y &= \cdot\, \overline{2}22... = 1\,, & Y' &= \cdot\, \overline{2}22... = 1\,, \end{aligned}$$

ove le cifre sopralineate indicano il periodo.

E quindi si vede che X ed X' possono essere *eguali* in *forma* e *valore*, oppure *diversi* di *forma* ma di *egual valore* (e lo stesso Y ed Y').

Indicati dunque con t, x, y i « valori » delle successioni infinite T, X e Y si ha che x ed y sono funzioni di t definite nell'intervallo $0 \underset{e}{\vdash\!\dashv} 1$, che diremo « funzioni di PEANO ».

Allora si può dimostrare facilmente che il punto di coordinate (x, y) descrive una curva continua, che riempie il quadrato costituito dai punti le cui coordinate sono comprese fra 0 ed 1 (estremi inclusi) (³).

La curva *continua* che riempie il *cubo* è ottenuta da G. PEANO con un procedimento analogo: cioè facendo corrispondere alla successione infinita di cifre (in base 3):

$$T = \cdot\, a_1 a_2 a_3 \dots a_{3n-2} a_{3n-1} a_{3n} \dots$$

tre successioni infinite di cifre:

$$\begin{aligned} X &= \cdot\, b_1 b_2 \dots b_{n-1} b_n \dots\,,\\ Y &= \cdot\, c_1 c_2 \dots c_{n-1} c_n \dots\,,\\ Z &= \cdot\, d_1 d_2 \dots d_{n-1} d_n \dots\,, \end{aligned}$$

in cui $b_1 = a_1$, c_1 è eguale ad a_2 od alla sua complementare secondo che b_1 è pari o dispari, d_1 è eguale ad a_3 od alla sua complementare secondo che $b_1 + c_1$ è pari o dispari, ed in generale: b_n è eguale ad a_{3n-2} od alla sua complementare secondo che:

$$c_1 + \dots + c_{n-1} + d_1 + \dots + d_{n-1}$$

è pari o dispari; c_n è eguale ad a_{3n-1} od alla sua complementare secondo che:

$$d_1 + \dots + d_{n-1} + b_1 + \dots + b_n$$

(³) L'espressione analitica esplicita di x e di y in funzione di t è stata ottenuta da U. CASSINA mediante l'uso di alcune notazioni introdotte nel calcolo numerico e del simbolo operativo **K** che trasforma una cifra nella sua complementare. Cfr.: U. CASSINA, *Calcolo numerico*, ed. Zanichelli, Bologna, 1928; U. CASSINA, *L'opera scientifica di Giuseppe Peano*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, **7**, 323-389, § 4, (1933).

è pari o dispari; e d_n è eguale ad a_{3n} od alla sua complementare secondo che:

$$b_1 + \ldots + b_n + c_1 + \ldots + c_n$$

è pari o dispari.

Cosicchè $3n$ cifre di T danno n cifre di X, Y e Z. Le cifre di X dipendono dalle cifre di posto $1, 4, 7, \ldots, 3n-2, \ldots$ di T; quelle di Y dalle cifre di posto $2, 5, 8, \ldots, 3n-1, \ldots$ di T; e quelle di Z dalle cifre di posto $3, 6, 9, \ldots, 3n, \ldots$.

Detti x, y, z, t i « valori » di X, Y, Z, T si può dimostrare che x, y, z sono funzioni *continue* di t, e che se t varia fra 0 ed 1 (estremi inclusi) x, y, z prendono tutte le terne di valori che soddisfano alle condizioni:

$$0 \leqq x \leqq 1\,, \quad 0 \leqq y \leqq 1\,, \quad 0 \leqq z \leqq 1\,,$$

e quindi il punto P di coordinate (x, y, z) descrive una curva continua che riempie un intero *cubo*.

§ 3. – Rappresentazioni grafiche della curva di Peano.

1. – Corrispondenza " ridotta " di Peano e poligonali corrispondenti. Per dare un'idea intuitiva della curva di PEANO — e del modo con cui egli, probabilmente, è pervenuto al suo risultato — consideriamo la corrispondenza fra successioni *finite* di cifre (in base 3), *subordinata* dalla corrispondenza di PEANO, che si ha fra la successione di $2n$ cifre:

$$T' = \cdot\, a_1 a_2 \ldots a_{2n-1} a_{2n}$$

e le due successioni:

$$X' = \cdot\, b_1 b_2 \ldots b_n\,,$$
$$Y' = \cdot\, c_1 c_2 \ldots c_n$$

di n cifre, quando le cifre di X' e Y' si ottengono con la legge di PEANO.

Esempi:

$$\begin{array}{lll} T' = \cdot 12\,, & T' = \cdot 1200\,, & T' = \cdot 120000\,, \\ X' = \cdot 1\,, & X' = \cdot 10\,, & X' = \cdot 100\,, \\ Y' = \cdot 0\,, & Y' = \cdot 02\,, & Y' = \cdot 022\,, \end{array}$$

in cui si vede che le successioni *finite* pur avendo lo stesso valore numerico possono dare luogo a successioni di valore numerico diverso; e viceversa successioni aventi lo stesso valore possono provenire da successioni di valore diverso.

Esempi:

$$\begin{array}{lll} T' = \cdot 11\,, & T' = \cdot 1122\,, & T' = \cdot 112222\,, \\ X' = \cdot 1\,, & X' = \cdot 10\,, & X' = \cdot 100\,, \\ Y' = \cdot 1\,, & Y' = \cdot 10\,, & Y' = \cdot 100\,. \end{array}$$

Se si considera poi la successione *infinita*:

$$T = \cdot 12\overline{0}000\ldots = 5/9\,,$$

che ha lo stesso valore delle successioni *finite* del primo gruppo di esempi, si ha:

$$X = \cdot 1\overline{0}0\ldots = 1/3\,,$$
$$Y = \cdot 0\overline{2}2\ldots = 1/3\,,$$

in cui il valore di Y è il limite (per n tendente all'infinito) dei valori di tutte le successioni Y'_n, ottenute a partire dalle successioni finite T'_n formate con le prime $2n$ cifre di T. La cosa si generalizza.

Cioè: il punto P di coordinate (x, y), ove x è il valore di X ed y il valore di Y, è il limite, per n tendente all'infinito, del punto P'_n di coordinate x'_n, y'_n, ove x'_n ed y'_n sono i valori delle successioni X'_n ed Y'_n ottenute con la consueta legge dalla successione T'_n formata dalle prime $2n$ cifre di T.

Dividiamo ora il segmento unitario $0 \mapsto 1$ in $9 = 3^2$ parti eguali coi punti 0, $1/9$, $2/9$, ..., $8/9$.

Questi sono tutti e soli i numeri che si possono rappresentare, in base 3, con successioni T' di 2 cifre, riportate nella seconda colonna dello specchietto seguente. Nella terza e quarta colonna sono segnate invece le corrispondenti successioni X' ed Y' di valori x' e y'.

	T'	X'	Y'
0	·00	·0	·0
1	·01	·0	·1
2	·02	·0	·2
3	·10	·1	·2
4	·11	·1	·1
5	·12	·1	·0
6	·20	·2	·0
7	·21	·2	·1
8	·22	·2	·2

Allora alla poligonale ordinata (che diremo *prima*) avente come vertici successivi i punti (x', y'), ordinati secondo il valore crescente di t, daremo il

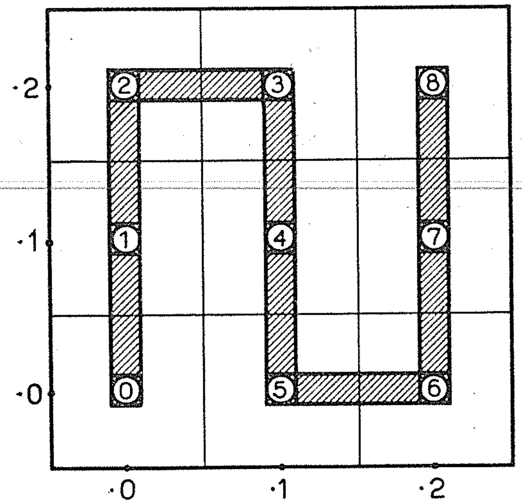


Fig. 1.

nome di *diagramma* della corrispondenza «ridotta» di Peano per $t = 0, 1/9, \ldots, 8/9$. Essa ha l'aspetto di un S capovolto. Nella fig. 1 tale poligonale è collocata in modo che i suoi vertici siano i centri di 9 quadrati ottenuti dividendo il quadrato Q di lato 1 con rette parallele ai lati. Si osservi che nella poligonale si percorrono prima i quadrati della prima colonna dal basso in alto, poi quelli della seconda dall'alto in basso, poi quelli della terza dal basso in alto.

Seguendo questa regola è facile costruire il diagramma della cor-

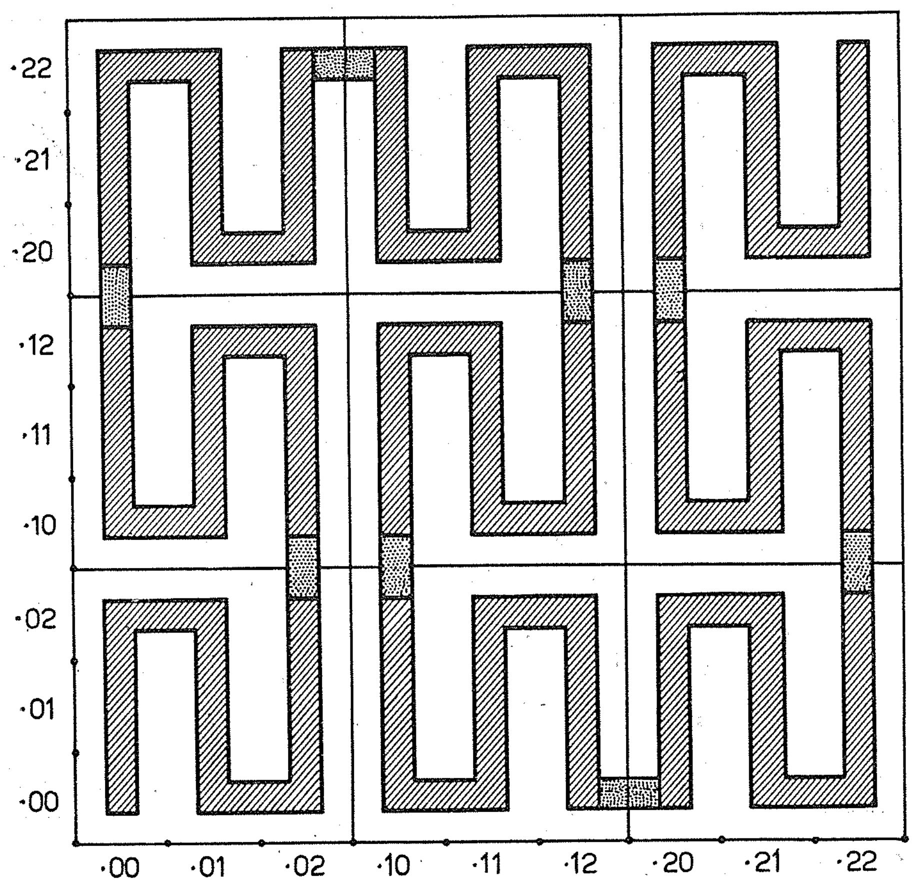
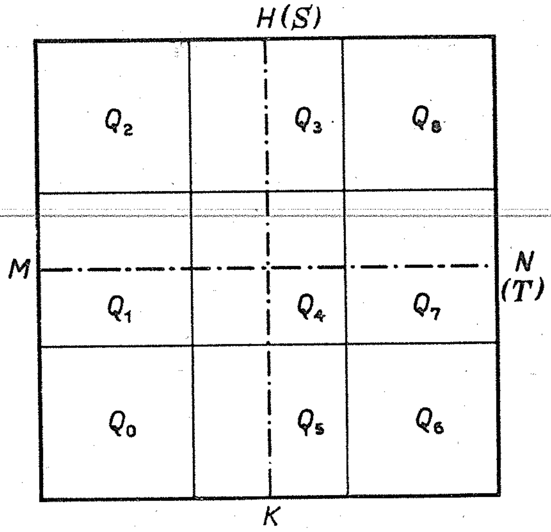


Fig. 2.

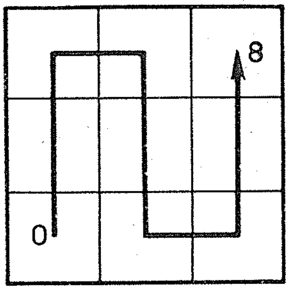
rispondenza « ridotta » di PEANO (*seconda* poligonale) nel caso in cui t assuma successivamente i valori: 0, 1/81, 2/81, ..., 80/81, che dividono il segmento unitario in $81 = 3^4$ parti eguali.

Basta infatti dividere il quadrato Q in 9 quadrati come nella fig. 1 poi disporre, in ciascuno di questi quadrati, una figura analoga alla prima poligonale — diritta o capovolta in modo opportuno — e saldare fra loro le poligonali così costruite (fig. 2).

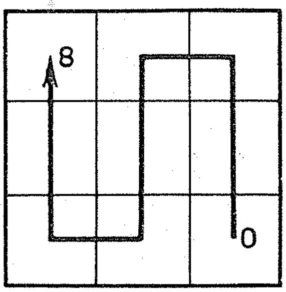


Fig, 3.

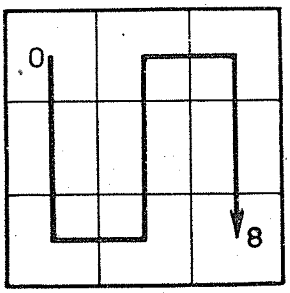
In modo analogo si può costruire la poligonale *terza*, diagramma della corrispondenza « ridotta » di PEANO nel caso in cui t assuma successivamente i valori: 0, 1/729, 2/729, ..., 728/729, ove $729 = 3^6$. E così via.



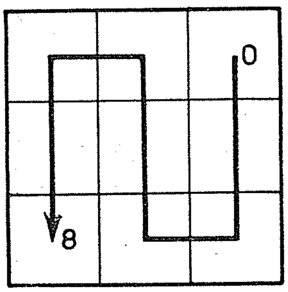
a
Fig. 4.



Sa
Fig. 5.



Ta
Fig. 6.



STa
Fig. 7.

La distanza di due vertici successivi nella prima poligonale vale 1/3, nella seconda 1/9, nella terza 1/27, ecc., nella n-esima $1/3^n$; la distanza di due punti successivi del segmento unitario (cioè di due valori successivi di t) nella prima poligonale vale 1/9, nella seconda 1/81, nella terza 1/729, ecc., nella n-esima $1/3^{2n}$; quindi, col tendere di n all'infinito, i punti t descrivono l'intero segmento unitario e i vertici della poligonale l'intero quadrato.

Ma, al tendere di n all'infinito, le successioni finite T', X', ed Y' diventano le successioni infinite

T, X ed Y legate dalla corrispondenza di PEANO: quindi la curva di PEANO appare come limite, per n tendente all'infinito, della poligonale n-esima, diagramma della corrispondenza «ridotta» per $t = 0, 1/3^{2n}, 2/3^{2n}, \ldots, (3^{2n} - 1)/3^{2n}$.

La successione infinita di poligonali, che abbiamo trovato intuitivamente come diagrammi della corrispondenza «ridotta» di PEANO, è suscettibile di una definizione diretta regolare, mediante la quale si ottiene perciò una definizione geometrica regolare della curva di PEANO.

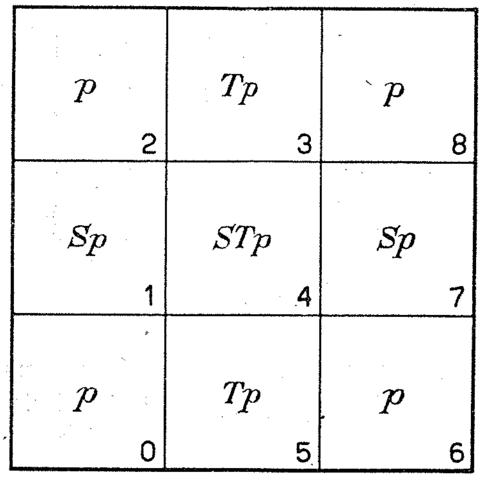


Fig. 8.

Infatti, sia Q un quadrato, che dividiamo mediante rette parallele ai lati in 9 quadrati parziali: Q_0, $Q_1, \ldots, Q_8$ situati come nella fig. 3.

Sia poi a la poligonale (ordinata) i cui vertici successivi sono i centri di $Q_0, Q_1, \ldots, Q_8$; $\boldsymbol{S}$ e $\boldsymbol{T}$ le simmetrie rispetto alle mediane HK (verticale) ed MN (orizzontale) del quadrato Q; $\boldsymbol{S}a$, $\boldsymbol{T}a$, $\boldsymbol{ST}a$ le trasformate di a in $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{T}$ e nel prodotto $\boldsymbol{ST}$ (che coincide con la simmetria rispetto al centro di Q). Tali poligonali sono rappresentate nelle figure 4, 5, 6, 7.

Allora definiamo per induzione la seguente successione infinita di poligonali: p'_1 coincide con a; e, nota p'_n, p'_{n+1} si ottiene costruendo in $Q_0, Q_1, \ldots, Q_8$ le poligonali: p'_n, $\boldsymbol{S}p'_n$, p'_n, $\boldsymbol{T}p'_n$, $\boldsymbol{ST}p'_n$, $\boldsymbol{T}p'_n$, p'_n, $\boldsymbol{S}p'_n$, p'_n, così come è indicato nella fig. 8, e saldandole poi fra loro con tratti rettilinei.

La successione così ottenuta non è altro che la successione delle poligonali *prima*, *seconda*, ... di poc'anzi, cioè dei *diagrammi* della corrispondenza «ridotta» di PEANO; e quindi la curva di PEANO può essere definita geometricamente come il limite di p'_n, al tendere di n all'infinito.

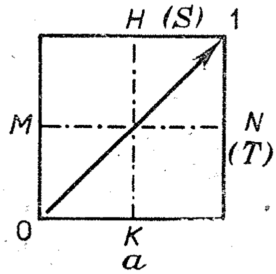


Fig. 9.

2. – Corrispondenza effettiva di Peano e poligonali corrispondenti. Invece di costruire i diagrammi della corrispondenza «ridotta» di PEANO, si possono costruire i diagrammi analoghi della corrispondenza *effettiva* di PEANO, cioè delle nuove poligonali $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ ove i vertici successivi di p_n — nuova poligonale n-esima — hanno per coordinate i valori delle funzioni x ed y di PEANO calcolati per $t = 0, 1/3^{2n}, 2/3^{2n}, \ldots, (3^{2n} - 1)/3^{2n}, 1$.

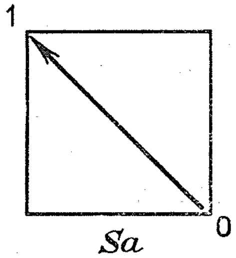
Sia a il segmento orientato di origine $(0, 0)$ ed estremo $(1, 1)$; esso coincide evidentemente con la poligonale p_0 (v. fig. 9).

I vertici della poligonale p_1 si ricavano poi dalla tabella seguente:

t	T	X	x	Y	y
$0 =$	$\cdot\overline{0}000\ldots$	$\cdot\overline{0}0\ldots =$	$\cdot 0$	$\cdot\overline{0}0\ldots =$	$\cdot 0$
$1/9$	$01\overline{0}0\ldots$	$0\overline{2}\ldots$	$\cdot 1$	$1\overline{0}\ldots$	$\cdot 1$
$2/9$	$02\overline{0}0\ldots$	$\overline{0}0\ldots$	$\cdot 0$	$2\overline{0}\ldots$	$\cdot 2$
$3/9$	$1\overline{0}00\ldots$	$1\overline{0}\ldots$	$\cdot 1$	$\overline{2}2\ldots$	$1\cdot$
$4/9$	$11\overline{0}0\ldots$	$1\overline{2}\ldots$	$\cdot 2$	$1\overline{2}\ldots$	$\cdot 2$
$5/9$	$12\overline{0}0\ldots$	$1\overline{0}\ldots$	$\cdot 1$	$0\overline{2}\ldots$	$\cdot 1$
$6/9$	$2\overline{0}00\ldots$	$2\overline{0}\ldots$	$\cdot 2$	$\overline{0}0\ldots$	$\cdot 0$
$7/9$	$21\overline{0}0\ldots$	$\overline{2}2\ldots$	$1\cdot$	$1\overline{0}\ldots$	$\cdot 1$
$8/9$	$22\overline{0}0\ldots$	$2\overline{0}\ldots$	$\cdot 2$	$2\overline{0}\ldots$	$\cdot 2$
1	$\overline{2}222\ldots$	$\overline{2}2\ldots$	$1\cdot$	$\overline{2}2\ldots$	$1\cdot$,

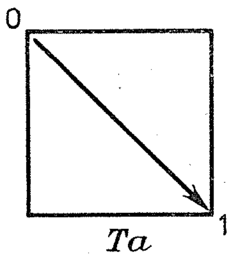
ove le cifre sopralineate indicano i periodi.

Si constata così che la poligonale p_1 può essere ottenuta da p_0 — e così in generale p_{n+1} da p_n — con la stessa legge con cui abbiamo ottenuto p'_{n+1} da p'_n: cioè — indicando ancora con $\boldsymbol{S}$ e $\boldsymbol{T}$ le simmetrie rispetto alle mediane



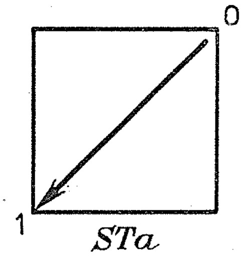
Sa

Fig. 10.



Ta

Fig. 11.



STa

Fig. 12.

HK (verticale) ed MN (orizzontale) del quadrato Q — costruendo nei quadrati $Q_0, Q_1, \ldots, Q_8$ le poligonali p_n, $\boldsymbol{S}p_n$, p_n, $\boldsymbol{T}p_n$, $\boldsymbol{ST}p_n$, $\boldsymbol{T}p_n$, p_n, $\boldsymbol{S}p_n$, p_n, in modo che l'estremo di una poligonale coincida con l'origine della poligonale successiva.

Nelle figg. 10, 11, 12 sono rappresentate le poligonali: $\boldsymbol{S}a$, $\boldsymbol{T}a$, $\boldsymbol{ST}a$; e nella fig. 13 la poligonale p_1, che mette in evidenza due punti doppi della curva di Peano: i punti di coordinate $(1/3, 1/3)$ e $(2/3, 2/3)$, che si hanno, il primo, per $t = 1/9$ e $t = 5/9$ ed, il secondo, per $t = 4/9$ e $t = 8/9$. Per maggiore chiarezza di disegno la poligonale p_1 è incurvata nei vertici ed i punti doppi sono segnati leggermente staccati. Nelle figg. 14, 15, 16 e 17 sono costruite: Sp_1, Tp_1, STp_1 e p_2.

Considerato il *reticolo* relativo alla poligonale p_n, cioè la scomposizione del quadrato Q in 3^{2n} quadratini coi lati paralleli a quelli del quadrato iniziale,

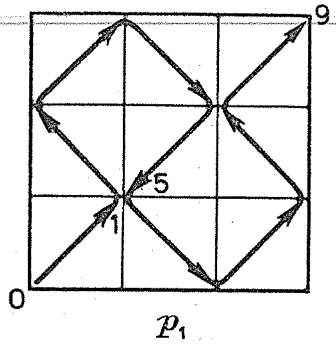


Fig. 13.

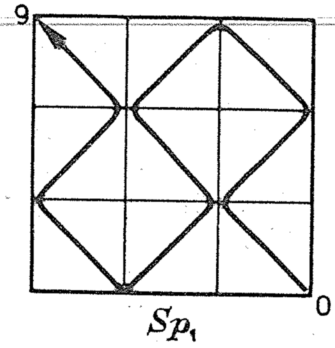


Fig. 14.

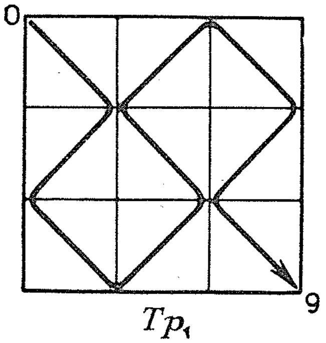


Fig. 15.

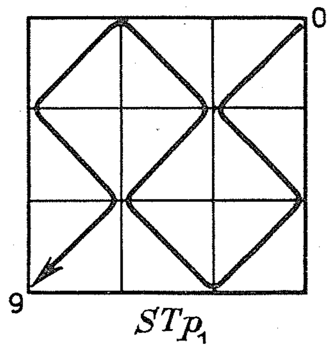


Fig. 16.

si può ancora osservare che la poligonale p_n può ottenersi costruendo in ogni quadratino di detto reticolo uno dei segmenti: a, Sa, Ta, STa, cioè una delle diagonali. Quindi ogni lato di p_n vale $3^{-n}\sqrt{2}$, e la lunghezza totale di p_n è $3^n\sqrt{2}$ (4).

(4) Le definizioni geometriche regolari, ottenute dalle poligonali relative alla corrispondenza ridotta ed a quella effettiva del PEANO, sono ispirate al lavoro: U. CASSINA, *Curva di Peano in base due*. Period. Mat., (4), **19**, 113-125 (1939), ma sono esposti qui per la prima volta. Le poligonali, poi, relative alla corrispondenza effettiva di PEANO — che non ci risultano usate altrove — hanno il vantaggio di mettere in evidenza gli infiniti punti doppi della curva (coi corrispondenti valori del parametro), ed inoltre di mostrare le approssimazioni successive fra due punti generici della curva, costituite successivamente da poligonali del tipo di p_0, p_1, p_2 . . . .

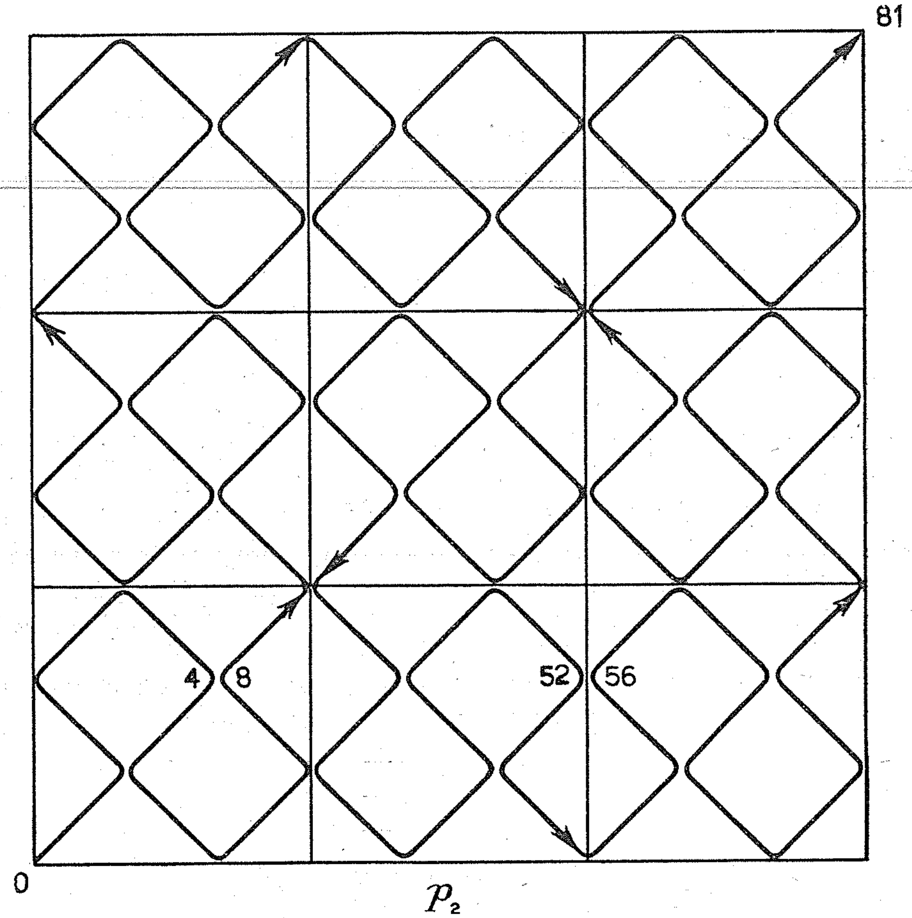


Fig. 17.

§ 4. – Ulteriori proprietà della curva di Peano.

Che considerazioni geometrico-intuitive, analoghe alle precedenti, siano state la fonte della Nota di PEANO è probabile: ed invero, nel *Formulario mathematico*, ed. V, 1906, p. 240, trovansi le figg. 1 e 2 (rappresentanti le poligonali p_1' e p_2') e lo scrivente ha avuto occasione di osservare che il PEANO, sul terrazzo della modesta villa, che aveva comperato a Cavoretto nell'estate del 1891, aveva fatto costruire con piastrelle di cemento l'immagine di p_2', che risaltava in nero sulle altre mattonelle bianche.

Tuttavia, la Nota di G. PEANO, pubblicata nei *Mathematische Annalen* del 1890, è prettamente analitica, e ciò — secondo me — perchè egli non voleva dubbi sulla validità delle sue conclusioni e perchè era suo abito costante il sopprimere tutto ciò che non era essenziale allo scopo del lavoro ([5]).

Inoltre la difficoltà vera non stava nel rendersi conto intuitivamente del fatto che una regione piana poteva concepirsi come il limite di una poligonale variabile, ma nel dare l'espressione *esplicita* delle coordinate di un punto di una regione piana come funzioni *continue* di un parametro variabile in un intervallo ([6]).

E perciò, G. PEANO, ha cura di osservare che: « mentre G. CANTOR (*Journal di Crelle*, t. 84, p. 242) aveva dimostrato la possibilità di stabilire una corrispondenza biunivoca fra i punti di una linea e quelli di una superficie e NETTO (*Journal di Crelle*, t. 86, p. 263) ed altri di dimostrare che tale corrispondenza era necessariamente *discontinua*, nella sua Nota ci dimostra l'*univocità* e la *continuità*, cioè ai punti di una linea si possono far corrispondere i punti di una superficie, in modo che l'immagine della linea sia l'intera superficie e che il punto sulla superficie sia funzione *continua* del punto sulla linea. Ma questa corrispondenza *non è biunivoca*, perchè ai punti di coordinate (x, y) del quadrato unitario, se x od y od entrambi sono numeri che moltiplicati per una potenza del 3 danno un numero intero (I categoria), i valori corrispondenti di t sono in numero di 2 o di 4 ».

Cosicchè la curva di PEANO ha *infiniti* punti *multipli*. Per esempio il punto $x = 1/3$, $y = 2/3$ è *quadruplo* ed i valori di t corrispondenti ad esso sono:

$$
\begin{aligned}
t &= 5/36 = \cdot 01\overline{02}\ldots, \\
t &= 11/36 = \cdot 02\overline{20}\ldots, \\
t &= 13/36 = \cdot 10\overline{02}\ldots, \\
t &= 19/36 = \cdot 11\overline{02}\ldots.
\end{aligned}
$$

([5]) Il primo a dare un esempio *intuitivo* di curva continua che riempie una regione piana (o curva di PEANO come suol ora dirsi universalmente) è stato D. HILBERT nei *Math. Ann.* di circa due anni dopo [Bd. **38**, p. 459 (1891)].

Egli divide un quadrato Q in 2^{2n} quadratini con rette parallele ai lati e numera i quadratini facendo corrispondere ad ognuno di essi uno dei numeri 1, 2, 3,..., 2^{2n}, in modo che numeri successivi competano a quadratini con un lato in comune; allora, detta q_n la poligonale ottenuta congiungendo con successivi tratti rettilinei i centri dei quadratini 1°, 2°, 3°,..., 2^{2n}-esimo, il limite della poligonale q_n, per n tendente all'infinito, è una curva che riempie il quadrato Q.

D. HILBERT si limita a disegnare le poligonali q_1, q_2, q_3 ed a definire per analogia la poligonale q_n, senza darne la legge esplicita di formazione (che permetta di evitare il principio delle infinite scelte arbitrarie) e senza scrivere l'equazione della curva.

([6]) È questa appunto la difficoltà superata mirabilmente da G. PEANO attraverso la sua corrispondenza fra successioni infinite di cifre in base 3.

G. PEANO accenna in modo esplicito, nella sua Nota, alla maggiore difficoltà di pervenire al suo risultato attraverso basi di numerazione *pari*, difficoltà ormai anch'essa superata. Cfr. U. CASSINA, *Curva di Peano in base due*, loc. cit. in ([4]).

Da notare, però, che la molteplicità diminuisce se uno o due valori del parametro corrispondenti al punto multiplo sono numeri della categoria I. Per esempio, il punto $x = 2/3$, $y = 2/9$, è *doppio* invece di essere quadruplo, ed i valori di t corrispondenti ad esso sono:

$$t = 56/81 = \cdot 2002\,,$$
$$t = 52/81 = \cdot 1221\,.$$

G. PEANO termina osservando che le sue funzioni continue mancano sempre di *derivata*. Quindi la curva di PEANO non ha mai retta *tangente*. Si può aggiungere che essa ha *lunghezza infinita*, e così pure ogni suo arco descritto mentre il parametro t varia fra t_0 e t_1, ove t_0 e t_1 sono numeri arbitrari compresi fra 0 ed 1.

La curva di PEANO costituisce così un esempio, anteriore di 14 anni a quello comunemente citato, dovuto a H. VON KOCH (7), di curve di questo tipo.

Infine, essa, ed ogni suo arco, è tale da non potere essere racchiusa in una regione piana d'area arbitrariamente piccola.

Conclusione.

Per finire dirò che oggidì — a sessant'anni dalla scoperta — la curva di PEANO non soltanto è ritenuta uno dei fatti più mirabili della *teoria degli insiemi* (secondo l'opinione di F. HAUSDORFF citata in principio), ma che anche nel campo più vasto della intera matematica non costituisce già una semplice curiosità, un esempio di una curva *teratologica* — o, per dirla in linguaggio comune, « mostruosa » — e priva di applicazioni, bensì l'esempio di una curva che ha trovato e trova applicazioni fisiche nello studio dei movimenti browniani, come risulta dagli studi di J. PERRIN; e per analogia anche in quello dei corpuscoli elementari: nuclei, protoni, neutroni, ecc.

Scrive infatti J. PERRIN, nel suo celebre volume « *Les atomes* » (mi riferisco alla ed. del 1948, che traduco testualmente), a proposito delle traiettorie di una particella in moto browniano (p. 109): « Si vede nello stesso tempo che non può essere fissata una tangente in alcun punto della traiettoria, ed è un caso in cui è veramente naturale il pensare a quelle funzioni continue senza derivate che i matematici hanno immaginato e che erano ritenute a torto come delle semplici curiosità matematiche, poichè l'esperienza può suggerirle ».

---

(7) H. VON KOCH, Arkiv Mat. Astr. Fys. Acad. Stockholm, pp. 681-702 (1904).

Se si tien poi presente quanto ho detto a proposito della rappresentazione grafica della curva di PEANO e si legge quanto scrive J. PERRIN a proposito delle figure riproducenti i moti browniani (p. 112): « una tale figura ed anche il disegno seguente non danno che un'idea ben affievolita del prodigioso intreccio della traiettoria reale. Se infatti si facessero delle registrazioni in intervalli di tempo 100 volte più avvicinati ciascun segmento sarebbe sostituito da un contorno poligonale relativamente così complicato come il disegno intero, e così di seguito », si riconoscono, nelle traiettorie descritte da J. PERRIN, le proprietà caratteristiche della curva di PEANO, che ricopre una intera regione piana o spaziale, e non soltanto di una curva priva di tangente.