LAMBERTO CESARI (*)

Sul problema di Geöcze. (**)

1. – Sia S una superficie continua e sia

$$(1) \qquad T: \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in J,$$

una qualsiasi delle infinite trasformazioni continue, equivalenti secondo FRÉCHET (¹), che rappresentano la superficie S. Qui è J una regione di JORDAN chiusa e semplice del piano uv. Si dice area di LEBESGUE $L(S)$ della superficie S il minimo limite delle aree elementari $a(\Sigma)$ delle superficie poliedriche Σ al loro tendere nel senso di FRÉCHET alla superficie S. Diremo $L^*(S)$ il minimo limite delle aree elementari $a(\Sigma)$ delle superficie poliedriche Σ *inscritte* nella S al loro tendere nel senso di FRÉCHET alla superficie S.

È sempre $L(S) \leqslant L^*(S)$ e si tratta di sapere se è sempre $L(S) = L^*(S)$. Indicherò tale problema come il *problema debole di* GEÖCZE e ad esso darò, nel presente lavoro, risposta affermativa. Dimostrerò precisamente il

Teorema T. *Per ogni superficie continua S si ha* $L(S) = L^*(S)$.

2. – Se $L(S) = +\infty$, allora necessariamente $L(S) = L^*(S) = +\infty$. Pertanto nella presente ricerca possiamo limitarci a considerare le sole superficie continue S con $L(S) < +\infty$. In tali condizioni si tratta di definire, per ogni intero N, una superficie poliedrica Σ inscritta nella S tale che $\| \Sigma, S \| < 1/N$, $a(\Sigma) < L(S) + 1/N$. Ciò equivale a definire, per ogni intero N, una superficie poliedrica Σ inscritta nella S per la quale esista una rappresentazione

$$(2) \qquad P: \quad x = X(u, v), \quad y = Y(u, v), \quad z = Z(u, v), \quad (u, v) \in J,$$

tale che, per ogni punto (u, v) di J si abbia $\{ T(u, v), P(u, v) \} < 1/N$ e inoltre sia $a(\Sigma) < L(S) + 1/N$.

(*) Professore o. della Università di Bologna. Indirizzo: Via Castiglione, 1 - Bologna (Italia).

(**) Lavoro ricevuto il 15-XI-1949.

(¹) Cfr. L. CESARI, *Sulle superficie di Fréchet*, Riv. Mat. Univ. Parma **1**, 19-44 (1950).

3. – Supponiamo che, della superficie S, sia data una ben determinata rappresentazione (1), d'altronde arbitraria. Diremo *problema forte di* GEÖCZE il problema di definire, per ogni intero N e *nei termini delle sole funzioni* x, y, z *della data rappresentazione*, una superficie poliedrica Σ inscritta nella S e la relativa rappresentazione (2) per la quale si abbia $\{T(u, v), P(u, v)\} < 1/N$ per ogni $(u, v) \in J$ e sia inoltre $a(\Sigma) < L(S) + 1/N$.

4. – Il problema forte di GEÖCZE è stato considerato sia per superficie date nella generale forma parametrica (1), sia per superficie date nella particolare rappresentazione

$$(3) \qquad T: \quad x = u\,, \quad y = v\,, \quad z = z(u, v)\,, \quad (u, v) \in Q \equiv (0, 1, 0, 1)\,.$$

Per superficie date nella forma (3) il problema forte è stato considerato dapprima in casi abbastanza estesi da H. HUSKEY [2] e da T. RADÓ [3] e, recentemente, da H. P. MULHOLLAND [4] nel caso generale. Per superficie date nella forma (1) il problema è stato trattato da A. MAMBRIANI [5] e successivamente da T. RADÓ [6], entrambi per la classe assai generale delle superficie, date nella forma (1), ove J è il quadrato unitario Q e ove

a) x, y, z sono funzioni assolutamente continue secondo TONELLI in Q;

b) le derivate parziali prime $x_u, y_v, \ldots, z_v$, che esistono quasi ovunque in Q, sono integrabili L^2 in Q.

Come conseguenza di tali risultati, e specialmente dei risultati di MAMBRIANI e RADÓ, abbiamo che il problema debole di GEÖCZE è senz'altro risolto per tutte le superficie che ammettono una rappresentazione soddisfacente alle precedenti condizioni e quindi in particolare per tutte le superficie aperte non degeneri [7]. Ancora più in particolare per tutte le superficie che ammettono

---

(2) H. D. HUSKEY, *Contribution to the problem of* GEÖCZE, Duke Math. Journ., **10**, 249-257 (1943); *Further contributions to the problem of* GEÖCZE, id. id., **11**, 333-339 (1944); FRÉCHET *polyedra*, id. id., 417-425.

(3) T. RADÓ, *On a problem of* GEÖCZE, Amer. Journ. of Math., **65**, 361-381 (1943); *Some remarks on the problem of* GEÖCZE, Duke Math. Journ., **11**, 497-506 (1944).

(4) H. P. MULHOLLAND, *On* GEÖCZE*'s problem for non-parametric surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. (1950).

(5) A. MAMBRIANI, *Sull'approssimazione dell'integrale di* LEBESGUE *per le funzioni di una variabile*, Boll. Un. Mat. Ital., ser. III, **2**, 173-181 (1947); *Sull'approssimazione dell'integrale di* LEBESGUE *per le funzioni di due variabili*, Rend. Ist. Lombardo di Scienze e Lettere, ser. III, **80**, 1-26 (1946-47); *Sul problema di* GEÖCZE, Annali Scuola Normale Sup. Pisa, ser. II, **13**, 1-17 (1948).

(6) T. RADÓ, *On the problem of* GEÖCZE, Annali Scuola Normale Sup. Pisa, ser. II, **14**, 21-30 (1948).

(7) In forza di un teorema di C. B. MORREY. Cfr. C. B. MORREY, *An analytic characterisation of surfaces of limite* LEBESGUE *area*, Amer. Journ. of Math., **57**, 692-702

una rappresentazione (3) (e che pertanto sono aperte non degeneri) (8) ma per queste è già stato risolto da H. P. MULHOLLAND anche il problema forte.

Nel presente lavoro darò alcuni complementi (§ 1) al problema forte di GEÖCZE in particolari condizioni e me ne varrò per risolvere (§ 2) il problema debole nel caso più generale, ossia per dimostrare il teorema T (9).

§ 1. – Osservazioni sul problema forte di Geöcze.

5. – Sia E_2 il piano dei punti $u = (\xi, \eta)$ ed E_3 lo spazio dei punti $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$. Sia $Q \equiv (0, 1, 0, 1)$ il quadrato chiuso unità del piano E_2 e sia (T, Q): $x^{(i)} = x^{(i)}(\xi, \eta)$, $u = (\xi, \eta) \in Q$, $i = 1, 2, 3$, una data trasformazione continua. Nel seguito per brevità ometteremo, in generale, l'aggettivo continua che si sottintende (S. F., n. 1). Siano $[\xi_i]$, $[\eta_i]$ due gruppi finiti di punti di $(0, 1)$: $0 = \xi_0 < \xi_0 < \ldots < \xi_m < \xi_{m+1} = 1$, $0 = \eta_0 < \eta_1 < \ldots < \eta_n < < \eta_{n+1} = 1$. Consideriamo i punti $u_{ij} \equiv (\xi_i, \eta_j)$ del quadrato Q e i triangoli t'_{ij}, t''_{ij} di vertici $t'_{ij} \equiv (u_{ij}, u_{i+1,j}, u_{i,j+1})$, $t''_{ij} \equiv (u_{i+1,j+1}, u_{i,j+1}, u_{i+1,j})$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $j = 0, 1, \ldots, n$. In corrispondenza consideriamo i punti $x_{ij} = T(u_{ij})$ e i triangoli T'_{ij}, T''_{ij} dello spazio E_3 di vertici $T'_{ij} \equiv (x_{ij}, x_{i+1,j}, x_{i,j+1})$, $T''_{ij} \equiv \equiv (x_{i+1,j+1}, x_{i,j+1}, x_{i+1,j})$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Diciamo P la superficie poliedrica formata dai $2(m-1)(n-1)$ triangoli T'_{ij}, T''_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m-1$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, P_1 quella formata dai $2(m+1)(n+1)$ triangoli T'_{ij}, T''_{ij}, $i = 0, 1, 2, \ldots, m$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$. Sia P: (T_0, R), P_1: (T_0, Q), ove R è il rettangolo $R \equiv (u_1, u_m, v_1, v_n) \subset Q$ e T_0 è la trasformazione che si ottiene rappresentando linearmente ogni triangolo T'_{ij}, T''_{ij} sopra il corrispondente triangolo t'_{ij}, t''_{ij}. Le superficie poliedriche P, P_1 sono entrambe inscritte nella S e di più la poliedrica P_1 ha per contorno (S. F., n. 11) una poligonale Λ inscritta nella curva $\mathfrak{L}$ contorno della superficie S (S. F., nn. 13, 18).

(1935). Per una dimostrazione diretta si veda L. CESARI, *Criteri di uguale continuità ed applicazioni alla quadratura delle superficie*, Annali Scuola Normale Sup. Pisa, (2) **12**, 61-84 (1943).

(8) Per tali deduzioni si veda A. MAMBRIANI, loc. cit. in (5), terzo lavoro citato.

(9) Per tutte le notazioni e per numerosi teoremi rimando a L. CESARI, *Sulle superficie di* FRÉCHET, Riv. Mat. Univ. Parma **1**, 19-44 (1950). Citerò tale lavoro con la sigla « S. F. » seguita dal numero. Per l'enunciato del teorema T cfr. L. CESARI, *Sulla definizione di area di una superficie* (comunicazione), Atti della Accademia delle Scienze di Bologna, **7**, 45-46 (1947-1948); L. CESARI, *On* GEÖCZE*'s problem* (comunicazione), Bull. Am. Math. Soc., **55**, 716 (1949).

6. – A. MAMBRIANI [10] ha dimostrato il

Teorema. *Se S: (T, Q) è una data superficie, (T, Q): $x^{(i)} = x^{(i)}(\xi, \eta)$, $u = (\xi, \eta) \in Q$, se la trasformazione (T, Q) soddisfa le seguenti condizioni: a) le funzioni $x^{(i)}(\xi, \eta)$, $i = 1, 2, 3$, sono assolutamente continue secondo* TONELLI *in Q; b) le derivate parziali prime $\partial x^{(i)}/\partial\xi$, $\partial x^{(i)}/\partial\eta$, $i = 1, 2, 3$, che esistono quasi ovunque in Q, sono integrabili L^2 in Q, allora per ogni intero N è possibile scegliere due gruppi finiti di punti $[\xi_i]$, $[\eta_i]$ tali che $\xi_{i+1} - \xi_i < 1/N$, $i = 0, 1, 2, \ldots, m$, $\eta_{j+1} - \eta_j < 1/N$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, e tali che per la corrispondente poliedrica P: (T_0, R) (n. 5) si abbia $a(P) < L(S) + 1/N$.*

7. – Nei ragionamenti di MAMBRIANI è contenuto anche il seguente

Teorema. *Se S: (T, Q) è una data superficie, (T, Q): $x^{(i)} = x^{(i)}(\xi, \eta)$, $u = (\xi, \eta) \in Q$, se la trasformazione (T, Q) soddisfa le condizioni a), b) del n. 6, se il contorno $\mathfrak{L}$ della superficie S è una curva rettificabile, allora per ogni intero N è possibile scegliere due gruppi finiti di punti $[\xi_i]$, $[\eta_i]$ tali che $\xi_{i+1} - \xi_i < 1/N$, $i = 0, 1, 2, \ldots, m$, $\eta_{j+1} - \eta_j < 1/N$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, e tali che per la corrispondente poliedrica P_1: (T_0, Q), (n. 5) si abbia $a(P_1) < L(S) + 1/N$. Il contorno Λ della poliedrica P_1 è una poligonale inscritta nella curva $\mathfrak{L}$.*

Dimostrazione. Sia $\omega(\delta)$ il modulo di continuità della data trasformazione (T, Q) (S. F., n. 2). Sia N' il più piccolo intero tale che $N' \geqslant 2N$, $2\omega(2/N') \leqslant 1/N$, $\omega(1/N')$ lungh $\mathfrak{L} \leqslant 1/N$ e sia P la poliedrica del n. 6 relativa all'intero N'. Dividiamo i $2(m+1)(n+1)$ triangoli T'_{ij}, T''_{ij} costituenti la corrispondente poliedrica P_1 (n. 5) in due categorie ponendo nella prima tutti quelli che hanno almeno un lato iscritto nella curva $\mathfrak{L}$ e cioè i triangoli T'_{ij} con $i = 0$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ e $j = 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots, m$, nonchè i triangoli T''_{ii} con $i = m$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, e $j = n$, $i = 0, 1, 2, \ldots, m$. In tutto $2(m+n+1)$ triangoli della prima categoria. Diciamo della seconda categoria tutti gli altri e cioè i $2(m-1)(n-1)$ triangoli costituenti P e ancora gli altri $2(m+n-1)$ non considerati ancora.

Per ciascun triangolo della prima categoria diciamo l il lato, o uno dei lati di esso, inscritto nella curva $\mathfrak{L}$. L'altezza relativa sarà minore di ciascuno dei rimanenti lati e perciò $< \omega(1/N')$. L'area di ciascun triangolo sarà dunque $< 1/2\, l\omega(1/N')$ e la somma delle aree di tutti i triangoli della prima categoria sarà $< 1/2\, \omega(1/N')\Sigma l < 1/2\, \omega(1/N')$ lungh $\mathfrak{L} \leqslant 1/2\, N$.

I triangoli della seconda categoria possono essere trattati tutti insieme con gli stessi ragionamenti usati da MAMBRIANI per il teorema del n. 6 senza alcuna modificazione nelle valutazioni finali. Pertanto $a(P_2) \leqslant 1/2N + [L(S) + 1/N')] \leqslant$ $\leqslant L(S) + 1/N$. Per ogni punto $u \in Q$ è poi $\{T_0(u), T(u)\} \leqslant \omega(2/N') < 1/N$.

---

[10] A. MAMBRIANI, loc. cit. in [5], terzo lavoro citato.

8. – Teorema. *Sia S una superficie, sia P una superficie poliedrica inscritta nella S, sia $a(P) \leqslant L(S) + c^2$, $c > 0$, siano S: (T_2, J_1), P: (T_3, R_1) rappresentazioni tipiche* (S. F., n. 18) *delle superficie S e P, ove $R_1 \subset J_1$ sono regioni di* JORDAN, *sia $\{T_2(u), T_3(u)\} \leqslant c$ per ogni $u \in R_1$, sia S: (T_0, J_0) un'altra qualsiasi rappresentazione della superficie S sopra la regione di* JORDAN *J_0 e infine le faccie della poliedrica P abbiano tutte diametro $\leqslant c$. Allora esiste una regione di* JORDAN *$R_0 \subset J_0$, una poliedrica P_1 e una rappresentazione P_1: (T_1, R_0) della poliedrica P_1 tali che* 1) *P_1 è inscritta nella S;* 2) *$a(P_1) \leqslant L(S) + 2c^2$;* 3) *$S$: (T_0, J_0), P_1: (T_1, R_0) sono rappresentazioni tipiche* (S. F., n. 18) *delle superficie S e P_1;* 4) *$\{T_0(u), T_1(u)\} \leqslant 4c$ per ogni $u \in R_0$;* 5) *le faccie della poliedrica P_1 hanno tutte diametro $\leqslant 2c$. Infine se $R_1 = J_1$ è anche $R_0 = J_0$.*

Dimostrazione. Come sappiamo (S. F., nn. 13, 18) esiste una suddivisione di R in regioni di JORDAN t_i, $i = 1, 2, \dots, m$, in numero finito m, su ciascuna delle quali T_3 rappresenta una faccia triangolare Δ_i di P. Siano u'_j, $j = 1, 2, \dots, l$, i vertici del reticolato (S. F., nn. 13, 18). Ad essi T_3 fa corrispondere i vertici $T_3(u'_j)$ delle faccie Δ_i, $i = 1, 2, \dots, m$, della P. Si noti che $T_3(u'_j) = T_2(u'_j)$, $j = 1, 2, \dots, l$ (S. F., n. 18).

Da $(T_2, J_1) \sim (T_0, J_0)$ segue che, per ogni intero n, esiste (S. F., n. 6) un omeomorfismo Ω_n tra J_0 e J_1 tale che, se $u \in J_0$, $u' \in J_1$, $u = \Omega_n(u')$, allora $\{T_0(u), T_2(u')\} \leqslant 1/n$. Pertanto, se $u_{jn} = \Omega_n(u'_j)$, $u_{jn} \in J_0$, $j = 1, 2, \dots, l$, è pure $\{T_0(u_{jn}), T_2(u'_j)\} \leqslant 1/n$, $j = 1, 2, \dots, l$. Diciamo P_1 la poliedrica che si ottiene sostituendo ai triangoli Δ_i della P [di vertici i punti $T_3(u'_j) = T_2(u'_j)$], i nuovi triangoli Δ'_i aventi per vertici i corrispondenti punti $T_0(u_{jn})$. Si noti che le lunghezze dei lati di Δ'_i differiscono da quelle dei lati di Δ_i per non più di $2/n$ e perciò potremo scegliere n abbastanza grande affinchè, per ogni i, si abbia $a(\Delta'_i) < a(\Delta_i) + c^2/m$, $i = 1, 2, \dots, m$. Supporremo inoltre n tale che $n > 4/c$. Intanto abbiamo $a(P_1) \leqslant a(P) + c^2 \leqslant L(S) + 2c^2$. Esiste poi una rappresentazione di ciascun lato di Δ'_i sulla frontiera t^*_i di t_i in modo che ai punti u'_j corrispondano i vertici $T_0(u_{jn})$ dei triangoli Δ'_i. Se completiamo (S. F., n. 19) nell'interno di t_i tale rappresentazione, otteniamo una rappresentazione (T_4, R_1) della poliedrica P_1. Si noti che, per ogni punto $u' \in R_1$, è $u' \in t_i$ per un opportuno i e quindi $\{T_4(u'), T_3(u')\} \leqslant \{T_4(u'), T_4(u'_j)\} + \{T_4(u'_j), T_3(u'_j)\} + \{T_3(u'_j), T_3(u')\}$, ove u'_j è un vertice di t_i e ove a secondo membro la prima espressione è $\leqslant$ del diametro di Δ'_i, la seconda è $\leqslant 1/n$, la terza è $\leqslant$ del diametro di Δ_i. Pertanto $\{T_4(u'), T_3(u')\} \leqslant (c + 2/n) + 1/n + c = 2c + 3/n < 3c$.

Ora sia $T_1 = \Omega_n T_4$, $R_0 = \Omega_n R_1$. Allora P_1: (T_1, R_0) è una nuova rappresentazione della poliedrica P_1. Inoltre R_0 è una regione di JORDAN divisa nelle m regioni $t'_i = \Omega_n t_i$, costituenti un reticolato (S. F., n. 13), e su ciascun triangolo curvilineo t'_i la trasformazione T_1 rappresenta un triangolo Δ'_i. Di più nei punti u_{jn} vertici del reticolato si ha $T_1(u_{jn}) = T_4(u'_j) = T_0(u_{jn})$ e pertanto S: (T_0, J_0), P_1: (T_1, R_0), $R_0 \subset J_0$, sono rappresentazioni tipiche della superficie S e della poliedrica P_1 inscritta nella S (S. F., n. 18). Sia ora $u \in R_0$, $u' \in R_1$, $u = \Omega_n(u')$. Allora $\{ T_1(u), T_0(u) \} = \{T_1(u'), T_0(u) \} \leqslant \{ T_1(u'), T_3(u') \} + \{ T_3(u'), T_2(u') \} + \{ T_2(u'), T_0(u) \} \leqslant (2c + 3/n) + c + 1/n = 3c + 4/n \leqslant 4c$.

Si noti che su ciascun triangolo t_i la trasformazione T_3 ha una oscillazione $\leqslant c$ essendo tale oscillazione pari al diametro di Δ_i. Pertanto la T_2 ha sullo stesso triangolo t_i una oscillazione $\leqslant c + c + c = 3c$. Infine la T_0 ha sul triangolo t'_i una oscillazione $\leqslant 3c + 2/n < 4c$.

9. - Teorema. *Nelle condizioni del teorema precedente, se $J_1 - R_1$ è diviso in k regioni di* JORDAN γ_j, $j = 1, 2, \dots, k$, *mediante k archi semplici l_j congiungenti R_1^* con J_1^* a due a due senza punti in comune, se la trasformazione T_2 ha una oscillazione $\leqslant c$ su ciascuna regione di* JORDAN γ_j, $j = 1, 2, \dots, k$, *se $u_1, u_2, \dots, u_\nu$ sono ν punti fissi di J_0, si può definire una superficie poliedrica P'_1: (T'_1, R'_0), $R_0 \subset R'_0 \subset J_0$, tale che* 1) *$P'_1$ è inscritta nella S;* 2) *$a(P'_1) \leqslant L(S) + 2c^2 + 48\nu c^2$;* 3) *$S$: (T_0, J_0), P'_1: (T'_1, R'_0) sono rappresentazioni tipiche della S e della poliedrica P'_1 inscritta nella S* (S. F., n. 18); 4) *$\{ T_0(u), T'_1(u) \} \leqslant 4c$ per ogni $u \in R'_0$;* 5) *le faccie della poliedrica P'_1 hanno tutte diametro $\leqslant 4c$;* 6) *$T_0(u_h) = T'_1(u_h)$ e i punti u_h sono vertici del reticolato relativo alla (T'_1, R'_0), $h = 1, 2, \dots, \nu$;* 7) *è possibile dividere $J_0 - R'_0$ in k regioni di* JORDAN γ'_j, $j = 1, 2, \dots, k$, *mediante k archi semplici congiungenti $R_0'^*$ con J_0^* a due a due senza punti in comune e la trasformazione T_0 ha una oscillazione $\leqslant 4c$ su ciascuna regione γ'_j, $j = 1, 2, \dots, k$.*

Dimostrazione. Utilizzando le notazioni del n. 8 supponiamo dapprima $R_1 \equiv J_1$ onde $R_0 = \Omega_n R_1 = \Omega_n J_1 = J_0$. Siano u_h, $h = 1, 2, \dots, \nu$, i ν punti dati su J_0. Definiamo anzitutto, come nel n. 8, la poliedrica P_1 e la sua rappresentazione (T_1, J_0). Sia $[t_i, i = 1, 2, \dots, m]$ il reticolato di J_0 relativo. Sia Δ_i la faccia di P_1 rappresentata da T_1 su t_i. Diciamo $t_1, t_2, \dots, t_p$ i soli triangoli t_i che contengono punti u_h nell'interno o sul loro contorno (esclusi i vertici), siano $t_{p+1}, \dots, t_m$ i rimanenti, cioè quelli che non contengono punti u_h o i cui punti u_h cadono esclusivamente nei loro vertici. Diciamo h_i il numero dei punti u_h che cadono nell'interno o sul contorno (fuori dai vertici) del triangolo t_i, $i=1, 2, \dots, p$. Poichè ognuno di questi punti u_h (cioè dei soli in numero di Σh_i che consideriamo), appartiene al più a due triangoli t_i si ha $\Sigma h_i \leqslant 2\nu$. Dividiamo ogni triangolo t_i $(i = 1, 2, \dots, p)$ in un nuovo reticolato di ν_i triangoli t_{is}, $s = 1, 2, \dots, \nu_i$, in modo che i vertici u_j del triangolo t_i e gli h_i punti u_h che cadono in t_i siano tutti e soli i vertici del reticolato. Si può far sì che $\nu_i \leqslant 3h_i$ (11) e perciò abbiamo in tutto $\Sigma \nu_i \leqslant 3 \Sigma h_i \leqslant 6\nu$ triangoli t_{is}.

(11) Se in un triangolo t di vertici v_1, v_2, v_3 sono dati h punti distinti $u_1, u_2, \dots, u_h$, dimostriamo che t si può dividere in non più di $3h$ triangoli (curvilinei) in modo che gli h punti dati e i tre vertici siano tutti e soli i vertici dei nuovi triangoli. L'asserto è vero per $h = 1$; supponiamolo vero per tutti gli interi $< h$ e dimostriamolo per h.

Definiamo la trasformazione (T_1', J_0) stabilendo che sia $(T_1', t_i) = (T_1, t_i)$, $i = p+1, p+2, ..., m$, e stabilendo che T_1' rappresenti su ogni triangolo t_{is} il triangolo rettilineo Δ_{is} che ha per vertici i corrispondenti punti $T_1(u_j) = T_0(u_j)$ e $T_0(u_h)$. La trasformazione (T_1', J_0) rappresenta una unica superficie poliedrica le cui faccie sono i triangoli Δ_i, $i = p+1, p+2, ..., m$, Δ_{is}, $s = 1, 2, ..., \nu_i$, $i = 1, 2, ..., p$. Le proprietà 1), 3), 6) sono evidenti.

Ricordando che la T_0 ha su ciascun triangolo t_i una oscillazione $< 4c$ (n. 8), ne risulta che altrettanto accade sui triangoli t_{is} e perciò anche le faccie Δ_i, Δ_{is} della poliedrica P_1' hanno tutte diametro $< 4c$. Ciò prova la 5). Inoltre le faccie Δ_{is} avendo diametro $< 4c$ hanno area $< 8c^2$ e perciò $a(P_1') \leqslant a(P_1) + 6\nu(8c^2) \leqslant L(S) + 2c^2 + 48\nu c^2$, ciò che dimostra la 2).

Notiamo ancora che ogni punto dell'insieme $T_0(t_{is})$ ha dai vertici del triangolo Δ_{is}, i quali appartengono all'insieme, distanze minori od uguali al diametro e perciò $< 4c$. Ne segue che ogni punto dell'insieme $T_0(t_{is})$ ha da ogni punto del triangolo Δ_{is} distanza $< 4c$ e quindi in particolare $\{ T_0(u), T_1'(u) \} < 4c$ per ogni $u \in t_{is}$, ciò che prova la 4). Nell'ipotesi $R_1 \equiv J_1$, onde $R_0 \equiv J_0$, la 7) non ha luogo e il teorema è dimostrato.

Sia ora $R_1 \subset J_1$. Allora $R_0 \subset J_0$ e porremo $\gamma_{0j} = \Omega_n \gamma_j$, $j = 1, 2, ..., k$. Taluni punti $u_h \in \Omega_0$ possono ora essere esterni ad R_0 e perciò cadranno in regioni γ_{0j}. Possiamo ripetere con ovvie modifiche il ragionamento precedente solo che ora avremo nuovi triangoli esterni ad R_0 i quali formano, insieme con R_0, una nuova regione di JORDAN R_0', $R_0 \subset R_0' \subset J_0$.

10. – Teorema. *Nelle condizioni dei teoremi dei nn.* 8, 9, *se la trasformazione* (T_0, J_0) *è costante su certi archi* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu$ *disgiunti del contorno* J_0^* *di* J_0, *allora si può sempre definire la trasformazione* (T_0', R_0') *in modo che gli archi* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu$ *siano anche sul contorno di* R_0', T_0' *sia costante su questi e* $T_0'(u) = T_0(u)$ *per ogni* $u \in \lambda_i$, $i = 1, 2, ..., \mu$. *Valgono le rimanenti affermazioni dei nn.* 8, 9 *ove al posto di* ν *si ponga* $\nu + 2\mu$.

Dimostrazione. Diciamo x_i il punto $T_0(u)$, $u \in \lambda_i$. Si assumano nel teorema del n. 9 tra i punti u_h anche entrambi gli estremi degli archi λ_i. In tal modo i punti u_h sono in totale in numero $\leqslant \nu + 2\mu$. Su ogni arco λ_i si

---

Congiungiamo i tre vertici di t con u_1 mediante curve di JORDAN senza punti in comune a due a due oltre u_1 tutte interne a t (oltre i vertici che sono su t^*) e non passanti per alcuno dei punti $u_2, u_3, ..., u_h$. [Se u_1 è su un lato di t, diciamo v_1v_2, allora si consideri solo la curva u_1v_3]. In tal modo t è diviso in tre (due) triangoli, ciascuno contenente h_1, h_2, h_3 punti $u_2, u_3, ..., u_n$, con $h_1 + h_2 + h_3 = h - 1$ e perciò $h_1, h_2, h_3 \leqslant h - 1$. Potremo allora dividere ciascun triangolo in non più di $3h_1$, $3h_2$, $3h_3$ triangoli e in tal modo t è diviso in un numero di triangoli che è $\leqslant 3h_1 + 3h_2 + 3h_3 = 3(h-1) < 3h$. Ovvie modifiche sono da farsi all'ultima parte del ragionamento se u_1 è su un lato di t. L'asserto è dimostrato.

hanno due punti u_h estremi di λ_i ed un numero finito di altri punti u_h eventuali.

Sia $R_0 = J_0$. Allora in tutti i punti u_h di λ_i è $T_1'(u_h) = T_0(u_h) = x_i$ e dunque T_1' rappresenta su essi sempre lo stesso punto x_i. Su ogni archetto parziale di λ_i, T_1' rappresenta un segmento e perciò tali segmenti sono ridotti al solo punto x_i, cioè T_1' è costante su λ_i e $T_1'(\lambda_i) = T_0(\lambda_i) = x_i$, $i = 1, 2, ..., \mu$.

Sia ora $R_0 \subset J_0$. Dobbiamo dimostrare che è possibile costruire i triangoli del n. 9 esterni ad R_0 in modo tale che tutti gli archetti in cui i punti u_h dividono λ_i siano lati dei nuovi triangoli. Allo scopo diciamo $\eta(I)$ l'oscillazione di T_0 su un qualunque insieme I (S. F., n. 2). Consideriamo uno qualunque degli archi $\lambda = \lambda_i = u_1 u_2 \dots u_m$, di estremi u_1, u_m, supposti distinti. Allora u_1 farà parte di una regione $\gamma = \gamma_j$ e vi sarà un arco $\sigma = u'u''$ di R_0^* che contiene almeno un punto $\bar{u}$ di γ. Allora si tratta di costruire due archi semplici $\sigma' = u'u_1$, $\sigma'' = u''u_m$, di $J_0 - R_0$ tali che nella regione di JORDAN j, il cui contorno j^* sia $j^* = \lambda\sigma'^{-1}\sigma\sigma''$, si abbia $\eta(i) < 4c$. Allo scopo si conduca prima una curva l di γ congiungente $\bar{u}$ con u_1. Si ha $\eta(\sigma) \leq c$, $\eta(l) \leq \eta(\gamma) \leq c$, $\eta(\lambda) = 0$ e perciò $\eta(\sigma + l + \lambda) \leq 2c$ essendo $\sigma + l + \lambda$ un solo continuo. Basta ora che σ' e σ'' siano abbastanza vicine a $\sigma + l + \lambda$ perchè si abbia $\eta(j) < 2c + c/\mu < 4c$. Le diagonali $u''u_1$, $u''u_2$, ..., $u''u_m$ daranno la divisione di j in $m+1$ triangoli curvilinei di cui u', u'', u_1, ..., u_m sono tutti e soli i vertici e i cui lati ricoprono certamente λ. Se un altro arco λ ha punti in comune con γ si ripeta il procedimento sostituendo a σ l'arco σ' o l'arco σ'' e con evidenti modificazioni. Così si proceda via via per tutti gli archi λ_i, $i = 1, 2, ..., \mu$.

Qualora l'intero contorno J_0^* di J_0 sia un unico arco $\lambda = \lambda_1$, $\mu = 1$, allora T_0 è costante su J_0^* e immediatamente risulta che $\eta(J_0 - R_0) \leq 2c$. In tal caso una qualsiasi suddivisione di $J_0 - R_0$ in triangoli aventi i vertici nei punti u_{j_n} e u_h (almeno due su λ) verifica le condizioni richieste.

§ 2. - Il problema debole di Geöcze.

11. - Dimostrazione del teorema T per superficie S aperte non degeneri. - Sia S una superficie aperta non degenere (S. F., n. 9). Allora, potendosi supporre (n. 2) $L(S) < +\infty$, esiste (S. F., n. 17) una rappresentazione S: (T, Q) di essa sul quadrato fondamentale soddisfacente alle condizioni *a*), *b*) del n. 6. In forza del teorema del n. 6, ne risulta l'esistenza, per ogni intero N, di una superficie poliedrica Σ_N inscritta nella S avente le proprietà seguenti: $a(\Sigma_N) < L(S) + 1/N$, $\|\Sigma_N, S\| < 2\omega(2/N)$, ove $\omega(\delta)$ è il modulo di continuità (S. F., n. 2) della trasformazione (T, Q). Pertanto $\|\Sigma_N, S\| \to 0$ e quindi $L^*(S) \leq L(S)$. Dalla relazione $L(S) \leq L^*(S)$ (n. 1) segue $L(S) = L^*(S)$.

12. – **Le superficie S di tipo A** (S. F., n. 9). – Vale il seguente

Teorema [12]. *Sia S una superficie di tipo A con $L(S) < +\infty$. Allora, per ogni intero N, esiste una rappresentazione della S sul cerchio unità, S: (T, C), ed esiste pure una superficie S': (T', C) tali che* 1) $L(S') \leqslant L(S)$; 2) $\{ T(u), T'(u) \} \leqslant 1/N$ *per ogni* $u \in C$; 3) *esiste una suddivisione di C in poligoni (curvilinei) p_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, e in triangoli t_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, e $T(u) = T'(u)$ per ogni $u \in p_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$;* 4) *le superficie S_i: $(T, p_i) = (T', p_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, sono aperte non degeneri e $\Sigma L(S_i) = L(S')$;* 5) *le superficie Δ_i: (T', t_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, sono triangoli rettilinei dello spazio ridotti a segmenti o a punti e in ciascun vertice u di t_i si ha $T(u) = T'(u)$;* 6) *il contorno p_i^* di ciascun poligono p_i è $p_i^* = l_{i1}\lambda_{i1}l_{i2}\lambda_{i2} \ldots . l_{i\nu_i}\lambda_{i\nu_i}$, ove l_{ih}, $h = 1, 2, \ldots, \nu_i$, sono archi di C^*, λ_{ih}, $h = 1, 2, \ldots, \nu_i$, sono poligonali semplici di C a due a due senza punti interni in comune, congiungenti ciascuna due punti di C^* e T, T' sono entrambi costanti e uguali su ciascuna delle poligonali λ_{ih}, $h=1, 2, \ldots, \nu_i$, $i=1, 2, \ldots, m$;* 7) *se l_k, $k = 1, 2, \ldots, \mu$, sono gli archi di R^* non ricoperti dagli archi l_{ih}, allora posto L_k: (T, l_k), Λ_k: (T', l_k), le poligonali Λ_k sono iscritte negli archi L_k e hanno gli stessi estremi, $k = 1, 2, \ldots, \mu$.*

13. – Possiamo ora dimostrare il

Teorema. *Sia S una superficie di tipo A con $L(S) < +\infty$. Allora, per ogni intero N, esistono una poliedrica Σ inscritta nella superficie S e rappresentazioni tipiche* (S. F., n. 18) S: (T, C), Σ: (T', R), *ove C è il cerchio unità ed R un poligono inscritto in C, con le seguenti proprietà:* 1) $a(\Sigma) < L(S) + 1/N$; 2) $\{ T(u), T'(u) \} \leqslant 1/N$ *per ogni* $u \in R$; 3) *si può dividere $C - R$ in regioni di* JORDÁN γ_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, *mediante archi semplici di $C - R$ a due a due senza punti in comune in $(C - R)_0$ e aventi gli estremi su R^* e su C^*. Inoltre la trasformazione T ha su ogni regione γ_j una oscillazione $\leqslant 2/N$* (S. F., n. 2).

Se il contorno $\mathfrak{L}$ della superficie S (S. F., n. 11) *è rettificabile, allora è $R = C$, vale la* 1), *vale la* 2) *per ogni $u \in C$ e* 3') *la poligonale Λ contorno della poliedrica Σ è inscritta nella curva $\mathfrak{L}$ contorno della superficie S.*

Dimostrazione. Applichiamo alla S il teorema precedente e osserviamo che le superficie S_i: $(T, p_i)=(T', p_i)$, sono aperte non degeneri con $L(S_i)<+\infty$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Per ogni i esiste perciò (S. F., n. 17) una rappresentazione della superficie S_i: (T_i, Q), sul quadrato unità Q del piano ausiliario $\xi\eta$, soddisfacente alle condizioni *a*), *b*) del n. 6. Sempre per il teorema precedente T (e quindi anche T') è costante su tutti gli archi λ_{ih}, $h = 1, 2, \ldots, \nu_i$. Sempre

---

[12] L. CESARI, *Una uguaglianza fondamentale per l'area delle superficie*, Memorie Accademia d'Italia, **14**, 891-951 (1944); particolarmente il procedimento delle pagine 922-933.

per ogni i possiamo applicare il teorema del n. 6 fissando per l'intero N del n. 6 il più piccolo intero N'_i tale che $N_i \geqslant 8m\nu'_i N$, $8m\nu'_i \omega_i(2/N_i) \leqslant 1/N$, $\nu'_i = 2\nu_i$, ove con $\omega_i(\delta)$ abbiamo indicato il modulo di continuità (S. F., n. 2) della trasformazione (T_i, Q). Per ogni i esistono due gruppi di punti $[\xi_\alpha, \alpha = 0, 1, 2, ..., m_i + 1]$, $[\eta_\beta, \beta = 0, 1, 2, ..., n_i + 1]$ con $\xi_{\alpha+1} - \xi_\alpha \leqslant 1/N_i$, $\eta_{\beta+1} - \eta_\beta \leqslant 1/N_i$, $\alpha = 0, 1, 2, ..., m_i$, $\beta = 0, 1, 2, ..., n_i$, esiste una poliedrica Σ_{1i} inscritta nella S_i avente la rappresentazione Σ_{1i}: (T_{1i}, R_i), $R_i \equiv [\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_{m_i}, \eta_1 \leqslant \eta \leqslant \eta_{n_i}]$ e inoltre $a(\Sigma_{1i}) \leqslant L(S_i) + 1/N_i$, $\{ T_i(u), T_{1i}(u) \} \leqslant \omega_i(2/N_i) \leqslant 1/8N\nu'_i m$. Si noti che $Q - R_i$ è diviso dalle rette $\xi = \xi_\alpha$, $\alpha = 1, 2, ..., m_i$, $\eta = \eta_\beta$, $\beta = 1, 2, ..., n_i$, in rettangoli ciascuno di diametro $< 2/N_i$ su ciascuno dei quali perciò T_i ha una oscillazione $\leqslant \omega_i(2/N_i) \leqslant 1/8N\nu'_i m$.

Applichiamo ora i teoremi dei nn. 8, 9, 10 ove $c = 1/8N\nu'_i m$. Ne risulta che, per ogni i, esiste una poliedrica Σ_{2i} inscritta nella S_i e una sua rappresentazione Σ_{2i}: (T_{2i}, p'_i), ove p'_i è un opportuno poligono (a lati curvilinei), $p'_i \subset p_i$, aventi le proprietà: $a(\Sigma_{2i}) \leqslant L(S_i) + 2c^2 + 48\nu'_i c^2 < L(S_i) + 1/mN$; S_i: (T, p_i), Σ_{2i}: (T_{2i}, p'_i) sono rappresentazioni tipiche (S. F., n. 18); gli archi λ_{ih} di p^*_i fanno parte della periferia dei poligoni p'_i; la trasformazione T_{2i} è costante sugli archi λ_{ih}, $h = 1, 2, ..., \nu_i$, e $T_{2i}(\lambda_{ih}) = T(\lambda_{ih}) = T'(\lambda_{ih})$, $h = 1, 2, ..., \nu_i$; $\{ T(u), T_{2i}(u) \} \leqslant 4c < 1/2N$ per ogni $u \in p_i$; le faccie della poliedrica Σ_{2i} hanno tutte diametro $\leqslant 4c < 1/N$; $p_i - p'_i$ può dividersi in regioni di JORDAN mediante archi semplici congiungenti p^*_i con p'^*_i e su ognuno di esse T ha una oscillazione $\leqslant 4c < 1/2N$.

Diciamo T_0 la trasformazione che coincide con T_{2i} sul poligono p_i, $i = 1, 2, ..., m$, e con T sui triangoli t_j, $j = 1, 2, ..., n$. La trasformazione $T_0 = (T_0, R)$ è definita e continua sul poligono $R = \Sigma p'_i + \Sigma t_i$ e rappresenta una unica poliedrica Σ: (T_0, R) di area $a(\Sigma) = \Sigma a(\Sigma_{2i}) + \Sigma a(\Delta_i) \leqslant \Sigma L(S_i) + m(1/mN) + 0 = L(S') + 1/N \leqslant L(S) + 1/N$. Inoltre Σ è inscritta nella S e le trasformazioni S: (T, C), Σ: (T_0, R) danno rappresentazioni tipiche di S e Σ (S. F., n. 18). La 2) e la 3) seguono immediatamente.

Supponiamo ora $\mathfrak{L}$ rettificabile. Utilizzando il teorema del n. 7 anzichè quello del n. 6, avremo per le superficie Σ_{1i} rappresentazioni Σ_{1i}: (T_{1i}, Q). Pertanto (nn. 8, 9, 10) avremo $p'_i = p_i$ e quindi $R = C$ e per la Σ avremo una rappresentazione Σ: (T_0, C). Le 1) e 2) del testo valgono ancora. Osserviamo che le poligonali Λ_{ih}: (T_0, l_{ih}), $h = 1, 2, ..., \nu_i$, sono inscritte (n. 7) negli archi rettificabili L_{ih}: (T, l_{ih}); le poligonali Λ_k: (T_0, l_k) sono inscritte negli archi rettificabili L_k: (T, l_k). Perciò la intera poligonale Λ: (T_0, C^*) è inscritta nella curva $\mathfrak{L}$: (T, C^*).

14. – **Dimostrazione del teorema** A **per superficie** S **di tipo** A. – Dalla prima parte del teorema del n. 13 segue l'esistenza, per ogni intero N, di una poliedrica Σ_N inscritta nella S tale che $a(\Sigma_N) < L(S) + 1/N$, $\| \Sigma_N, S \| < 2/N$.

Pertanto $\|\Sigma_N, S\| \to 0$ per $N \to +\infty$ e quindi $L^*(S) \leqslant L(S)$. Dal n. 1 segue $L^*(S) = L(S)$.

15. – **Le superficie chiuse.** – Premettiamo il

Lemma. *Sia l una curva orientata rettificabile dello spazio E_3, siano λ_1, λ_2 due poligonali inscritte in l aventi gli stessi estremi di l e siano (T_1, I_1), (T_2, I_2) due prefissate rappresentazioni quasi lineari di λ_1 e λ_2 sui segmenti $I_1 \equiv [u^{(1)}=0, 0 \leqslant u^{(2)} \leqslant 1]$, $I_2 \equiv [u^{(1)} = 1, 0 \leqslant u^{(2)} \leqslant 1]$. I lati di λ_1 e λ_2 sottendano archi di l tutti di diametro $\leqslant c$. Esiste allora una poliedrica P e una rappresentazione P: (T, Q) quasi lineare nel quadrato $Q \equiv [0 \leqslant u^{(1)} \leqslant 1, 0 \leqslant u^{(2)} \leqslant 1]$ tale che 1) $T = T_1$ sul segmento I_1, $T = T_2$ sul segmento I_2; 2) T è costante sui segmenti $u^{(2)} = 0$, $u^{(2)} = 1$ di Q^*; 3) i vertici di P sono tutti e soli i vertici delle poligonali λ_1, λ_2; 4) le faccie di P hanno tutte diametro $\leqslant c$; 5) $a(P) \leqslant c$* lungh l.

Dimostrazione. Siano $u_0 \equiv (0, 0)$, $u_1, \ldots, u_m \equiv (0, 1)$ punti ordinati di I_1 ai quali corrispondano per la T_1 tutti e soli i vertici di λ_1; siano $u'_0 \equiv (1, 0)$, $u'_1, \ldots, u'_n \equiv (1, 1)$ punti ordinati di I_2 ai quali corrispondano per la T_2 tutti e soli i vertici di λ_2. Poniamo $x_i = T_1(u_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, m$, $x'_j = T_2(u'_j)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$. I punti x_i e così i punti x'_j, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, sono ordinati sulla curva l, $x_0 < x_1 < \ldots < x_m$, $x'_0 < x'_1 < x'_2 < \ldots < x_n$ e $x_0 = x'_0$, $x_m = x'_n$ sono gli estremi comuni di l, λ_1, λ_2. Gli archi $x_i x_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, e $x'_j x'_{j+1}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, della curva l hanno tutti diametro $\leqslant c$.

Sia $h_1 \leqslant m$ il massimo intero tale che l'arco $x_0 x_{h_1}$ abbia diametro $\leqslant c$, sia $k_1 \leqslant n$ il massimo intero tale che $x_{h_1} < x'_{k_1}$ e l'arco $x_{h_1} x'_{k_1}$ abbia diametro $\leqslant c$, sia $h_2 \leqslant m$ il massimo intero tale che $x'_{k_1} < x_{h_2}$ e l'arco $x'_{k_1} x_{h_2}$ abbia diametro $\leqslant c, \ldots$. Siano $x_{h_\nu} = x_m$, $x'_{k_\nu} = x'_n$ gli ultimi punti così ottenuti. Si noti che ogni segmento $x'_0 x_i$, $0 \leqslant i \leqslant h_1$, è inscritto nell'arco $x_0 x_{h_1}$ di l e perciò ha lunghezza $\leqslant c$, ogni segmento $x_{h_1} x'_j$ con $0 \leqslant i \leqslant k_1$ è inscritto in uno degli archi $x_0 x_{h_1}$, $x_{h_1} x_{k_1}$ di l e perciò ha lunghezza $\leqslant c$, ogni segmento $x'_{k_1} x_i$, $h_1 \leqslant i \leqslant h_2$, è inscritto in uno degli archi $x_{h_1} x'_{k_1}$, $x'_{k_1} x_{h_2}$ e perciò ha lunghezza $\leqslant c$, e così di seguito.

Sia P la poliedrica costituita dai triangoli $x'_0 x_0 x_1$, $x'_0 x_1 x_2, \ldots, x'_0 x_{h_1 - 1} x_{h_1}$, $x_{h_1} x'_0 x_1$, $x_{h_1} x'_1 x'_2, \ldots, x_{h_1} x'_{k_1 - 1} x'_{k_1}$, $x'_{k_1} x_{h_1} x_{h_1+1}, \ldots, x'_{k_1} x_{h_2 - 1} x_{h_2}$, $x_{h_2} x'_{k_1} x'_{k_1+1}, \ldots, x_{h_2} x'_{k_2 - 1} x'_{k_2}, \ldots$. Rappresentando linearmente ciascuno di tali triangoli sui triangoli di Q corrispondenti $u'_0 u_0 u_1$, $u'_0 u_1 u_2, \ldots, u'_0 u_{h_1 - 1} u_{h_1}$, $u_{h_1} u'_0 u_1, \ldots$, avremo una rappresentazione di P quasi lineare su Q.

Si noti che i triangoli del tipo $x'_j x_i x_{i+1}$ hanno il lato $x_i x_{i+1}$ che è un lato di λ_1 e tutti e tre i lati di lunghezza $\leqslant c$; i triangoli del tipo $x_i x'_j x'_{j+1}$ hanno il lato $x'_j x'_{j+1}$ che è un lato di λ_2 e tutti e tre i lati di lunghezza $\leqslant c$. Pertanto il loro diametro è sempre $\leqslant c$ e $a(P) \leqslant (c/2)$ lungh $\lambda_1 + (c/2)$ lungh $\lambda_2 \leqslant$ $\leqslant c$ lungh l.

Si noti che ogni faccia di P è del tipo $x'_j x_i x_{i+1}$ oppure del tipo $x_i x'_j x'_{j+1}$ e perciò si appoggia o ad un lato $x_i x_{i+1}$ di λ_1 o ad un lato $x'_j x'_{j+1}$ di λ_2.

Il procedimento di questo numero può applicarsi con ovvie modificazioni al caso di una curva l chiusa, I_1 e I_2 essendo circonferenze concentriche del piano o circonferenze parallele di una sfera.

16. – Teorema. *Data una superficie $\mathfrak{S}$ chiusa non degenere con $L(\mathfrak{S}) < +\infty$, allora, per ogni intero N esiste una superficie poliedrica $\mathfrak{P}$ inscritta nella $\mathfrak{S}$ ed esistono rappresentazioni tipiche* (S. F., n. 18) $\mathfrak{S}$: $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$, $\mathfrak{P}$: $(\mathfrak{T}_0, \mathfrak{C})$ *sopra la sfera unità $\mathfrak{C}$ tali che* 1) $a(\mathfrak{P}) \leq L(\mathfrak{S}) + 1/N$; 2) $\{\mathfrak{T}(u), \mathfrak{T}_0(u)\} \leq 1/N$ *per ogni* $u \in \mathfrak{C}$ (13).

Dimostrazione. Sia $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{C})$ una rappresentazione qualsiasi di $\mathfrak{S}$ su $\mathfrak{C}$. Esiste su $\mathfrak{C}$ una circonferenza σ' sulla quale $\mathfrak{T}_1$ è *non* costante. Diciamo l' la curva l': $(\mathfrak{T}_1, \sigma')$. Scelto un omeomorfismo Ω' di σ' in q, tale omeomorfismo può essere completato (S. F., n. 19) in un unico omeomorfismo che diremo ancora Ω' della sfera $\mathfrak{C}$ in sè. Se $\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_1 \Omega'$ allora $\mathfrak{S}$: $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{C}) \sim (\mathfrak{T}_2, \mathfrak{C})$, le superficie S'_ν: $(\mathfrak{T}_2, E_\nu)$, S'_σ: $(\mathfrak{T}_2, E_\sigma)$, ($E_\nu$, E_σ emisferi superiore ed inferiore di $\mathfrak{C}$), sono aperte non degeneri o di tipo A (S. F., n. 9) e $L(S'_\nu) + L(S'_\sigma) \leq L(\mathfrak{C})$ (S. F., n. 15).

Sia (T_2, C) la trasformazione che si ottiene proiettando dal polo u_σ sul cerchio equatoriale C di $\mathfrak{C}$ la trasformazione $(\mathfrak{T}_2, E_\nu)$. Diciamo C_0 il cerchio concentrico a C e raggio $1/\sqrt{3}$. In forza di S. F., n. 17, esiste una trasformazione (T'_2, C_0) tale che 1) $(T'_2, C_0) \sim (T_2, C)$; 2) esiste in C_0 un aggregato numerabile di cerchi c'_i, $i = 1, 2, \ldots$ (eventualmente uno solo) su ciascuno dei quali T'_2 è quasi conforme. Proiettando (T'_2, C_0) dal polo u_σ su $\mathfrak{C}$ si ottiene una trasformazione $(\mathfrak{T}'_2, C_\nu)$ ove C_ν è la calotta dei punti (θ, φ) di $\mathfrak{C}$ con $0 \leq \theta \leq \pi/3$ e $(\mathfrak{T}'_2, C_\nu) \sim (\mathfrak{T}_2, E_\nu)$. In forza di S. F., nn. 31-32, esiste una trasformazione $(\mathfrak{T}_3, \mathfrak{C})$ avente le seguenti proprietà: 1) $\mathfrak{S}$: $(\mathfrak{T}_2, \mathfrak{C}) \sim (\mathfrak{T}_3, \mathfrak{C})$; 2) S'_ν: $(\mathfrak{T}_2, E_\nu) \sim$ $\sim (\mathfrak{T}'_2, C_\nu) = (\mathfrak{T}_3, C_\nu)$; 3) S'_σ: $(\mathfrak{T}_2, E_\sigma) = (\mathfrak{T}_3, E_\sigma)$.

Esiste ora su E_ν (ad esempio nel cerchio c_1 di E_ν corrispondente al cerchio c'_1 di C_0) una curva semplice e chiusa σ su cui $\mathfrak{T}_3$ è non costante e vi

(13) In S. F., n. 10, si sono già introdotte le seguenti notazioni: ρ, θ, φ, coordinate polari di centro $(0, 0, 0)$, asse $u^{(3)}$, piano polare $u^{(2)} = 0$, $u^{(1)} \geq 0$ dello spazio E_3 dei punti $u = (u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)})$, $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$ coordinate cartesiane; $\mathfrak{C}$ sfera unità di E_3 cioè luogo dei punti u con $\rho = 1$; E_ν (E_σ) emisfero superiore (inferiore) di $\mathfrak{C}$ cioè luogo dei punti $u \in \mathfrak{C}$ con $u^{(3)} \geq 0$ $(u^{(3)} \leq 0)$; q circonferenza equatoriale, cioè luogo dei punti $u \in \mathfrak{C}$ con $u^{(3)} = 0$; $u_\nu = (0, 0, 1)$, $u_\sigma = (0, 0, -1)$ (coordinate cartesiane); C cerchio equatoriale, cioè luogo dei punti u con $u^{(3)} = 0$, $\rho \leq 1$. Inoltre C_0 sia il cerchio complanare e concentrico a C luogo dei punti u con $u^{(3)} = 0$, $0 \leq \rho \leq 1/\sqrt{3}$; C_ν, C_σ (calotte di $\mathfrak{C}$) luoghi dei punti $u \in \mathfrak{C}$ con $0 \leq \theta \leq \pi/3$, $2\pi/3 \leq \theta \leq \pi$, rispettivamente, $q = C^*$, $u_\nu \in C_\nu \subset E_\nu$, $u_\sigma \in C_\sigma \subset E_\sigma$.

rappresenta una curva chiusa $\mathfrak{L}$: $(\mathfrak{T}_3, \sigma)$ *rettificabile* (S. F., n. 17). Sia l la lunghezza di $\mathfrak{L}$. Scelto un omeomorfismo Ω di σ in q, tale omeomorfismo può essere completato (S. F., n. 19) in un unico omeomorfismo che diremo ancora Ω della sfera $\mathfrak{C}$ in sè. Se $\mathfrak{T}_4 = \mathfrak{T}_3\Omega$, allora $\mathfrak{S}$: $(\mathfrak{T}_3, \mathfrak{C}) \sim (\mathfrak{T}_4, \mathfrak{C})$, le superficie S_ν: $(\mathfrak{T}_4, E_\nu)$, S_σ: $(\mathfrak{T}_4, E_\sigma)$ sono aperte non degeneri o di tipo A (S. F., n. 9) e $L(S_\nu) + L(S_\sigma) \leqslant L(\mathfrak{C})$ (S. F., n. 15). Poichè la curva $\mathfrak{L}$: $(\mathfrak{T}_3, \sigma) \sim$ $\sim (\mathfrak{T}_4, q)$ è rettificabile, è ora (S. F., n. 15) $L(S_\nu) + L(S_\sigma) = L(\mathfrak{S})$.

Sia $(T_{4\nu}, C)$ la trasformazione che si ottiene proiettando $(\mathfrak{T}_4, E_\nu)$ dal polo u_σ su C. Poichè la superficie S_ν: $(\mathfrak{T}_4, E_\nu) \sim (T_{4\nu}, C)$ è di tipo A (oppure aperta non degenere) e di area finita secondo LEBESGUE, esistono (n. 13) trasformazioni $(T'_{4\nu}, C_0)$, $(T''_{4\nu}, C_0)$ sul cerchio C_0 tali che 1) S_ν: $(T'_{4\nu}, C_0) \sim (T_{4\nu}, C)$; 2) la superficie Σ_ν: $(T''_{4\nu}, C_0)$ è poliedrica e inscritta nella S_ν; 3) le trasformazioni S_ν: $(T'_{4\nu}, C_0)$, Σ_ν: $(T''_{4\nu}, C_0)$ sono rappresentazioni tipiche di S_ν e Σ_ν (S. F., n. 18); 4) $a(\Sigma_\nu) < L(S_\nu) + 1/3N$; 5) $\{ T'_{4\nu}(u), T''_{4\nu}(u) \} \leqslant 1/N$ per ogni $u \in C_0$; 6) il contorno $\mathfrak{L}_\nu$ della poliedrica Σ_ν è una poligonale inscritta nella curva rettificabile $\mathfrak{L}$. Posto $c = \min [1/2N, 1/3Nl]$, possiamo sempre supporre che ogni lato di $\mathfrak{L}_\nu$ sottenda un arco di $\mathfrak{L}$ di diametro $\leqslant c$ e sia rappresentato linearmente sul corrispondente arco di C_0^*. Diciamo ora $(\mathfrak{T}'_{5\nu}, C_\nu)$, $(\mathfrak{T}''_{5\nu}, C_\nu)$ le trasformazioni che si ottengono proiettando $(T'_{4\nu}, C_0)$, $(T''_{4\nu}, C_0)$ da u_σ su E_ν. Si ha S_ν: $(\mathfrak{T}'_{5\nu}, C_\nu) \sim (\mathfrak{T}_4, E_\nu)$, Σ_ν: $(\mathfrak{T}''_{5\nu}, C_\nu)$.

Sia $(T_{4\sigma}, C)$ la trasformazione che si ottiene proiettando $(\mathfrak{T}_4, E_\sigma)$ dal polo u_ν su C. Poichè la superficie S_σ: $(\mathfrak{T}_4, E_\sigma) \sim (T_{4\sigma}, C)$ è di tipo A (oppure aperta non degenere) e di area finita secondo LEBESGUE, esistono (n. 13) trasformazioni $(T'_{4\sigma}, C_0)$, $(T''_{4\sigma}, C_0)$ sul cerchio C_0 tali che 1) S_σ: $(T'_{4\sigma}, C_0) \sim (T_{4\sigma}, C)$; 2) la superficie Σ_σ: $(T''_{4\sigma}, C_0)$ è poliedrica e inscritta nella S_σ; 3) le trasformazioni S_σ: $(T'_{4\sigma}, C_0)$, Σ_σ: $(T'_{4\sigma}, C_0)$ sono rappresentazioni tipiche di S_σ e Σ_σ (S. F., n. 18); 4) $a(\Sigma) < L(S_\sigma) + 1/3N$; 5) $\{ T'_{4\sigma}(u), T''_{4\sigma}(u) \} \leqslant 1/N$ per ogni $u \in C_0$; 6) il contorno $\mathfrak{L}_\sigma$ della poliedrica Σ_σ è una poligonale inscritta nella curva rettificabile $\mathfrak{L}$. Possiamo sempre supporre che ogni lato di $\mathfrak{L}_\sigma$ sottenda un arco di $\mathfrak{L}$ di diametro $\leqslant c$ e sia rappresentato linearmente sul corrispondente arco di C_0^*. Diciamo $(\mathfrak{T}'_{5\sigma}, C_\sigma)$, $(\mathfrak{T}''_{5\sigma}, C_\sigma)$ le trasformazioni che si ottengono proiettando $(T'_{4\sigma}, C_0)$, $(T''_{4\sigma}, C_0)$ da u_ν su E_σ. Si ha S_σ: $(\mathfrak{T}'_{5\sigma}, C_\sigma) \sim (\mathfrak{T}_4, E_\sigma)$, Σ_σ: $(\mathfrak{T}''_{5\sigma}, C_\sigma)$.

Applicando quanto abbiamo visto in S. F., nn. 31, 32, alle trasformazioni $(\mathfrak{T}_4, \mathfrak{C})$, $(\mathfrak{T}_4, E_\nu)$, $(\mathfrak{T}'_{5\nu}, C_\nu)$, $\mathfrak{C} \supset E_\nu \supset C_\nu$, ne risulta che esiste una unica trasformazione $(\mathfrak{T}_5, \mathfrak{C}) \sim (\mathfrak{T}_4, \mathfrak{C})$ tale che $\mathfrak{T}_5 = \mathfrak{T}_4$ in E_σ, $\mathfrak{T}_5 = \mathfrak{T}'_{5\nu}$ in C_ν. Applicando ancora S. F., nn. 31, 32 alle trasformazioni $(\mathfrak{T}_5, \mathfrak{C})$, $(\mathfrak{T}_5, E_\sigma)$, $(\mathfrak{T}'_{5\sigma}, C_\sigma)$, $\mathfrak{C} \supset E_\sigma \supset C_\sigma$, ne risulta che esiste una unica trasformazione $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C}) \sim (\mathfrak{T}_5, \mathfrak{C})$ tale che $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_5$ in E_ν, $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}'_{5\sigma}$ in C_σ. Pertanto abbiamo: 1) $\mathfrak{S}$: $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C}) \sim$ $\sim (\mathfrak{T}_5, \mathfrak{C}) \sim (\mathfrak{T}_4, \mathfrak{C})$; 2) S_ν: $(\mathfrak{T}, C_\nu) = (\mathfrak{T}_5, C_\nu) = (\mathfrak{T}'_{5\nu}, C_\nu)$, S_σ: $(\mathfrak{T}, C_\sigma) =$ $= (\mathfrak{T}_5, C_\sigma) = (\mathfrak{T}'_{5\sigma}, C_\sigma)$.

In C_ν e C_σ sono anche definite le trasformazioni $(\mathfrak{T}''_{5\nu}, C_\nu)$, $(\mathfrak{T}''_{5\sigma}, C_\sigma)$ che, su C^*_ν, C^*_σ definiscono due poligonali $\mathfrak{L}_\nu$, $\mathfrak{L}_\sigma$ inscritte nella stessa curva $\mathfrak{L}$ di cui $(\mathfrak{T}, C^*_\nu)$, $(\mathfrak{T}, C^*_\sigma)$ sono due rappresentazioni e la curva $\mathfrak{L}$: $(\mathfrak{T}_4, q) \sim (\mathfrak{T}, C^*_\nu) \sim$ $\sim (\mathfrak{T}, C^*_\sigma)$ è rettificabile. Basta ora applicare il procedimento del n. 15 nella striscia $J = \mathfrak{C} - (C_\nu + C_\sigma)$, avendo cura di rappresentare ogni faccia della nuova poliedrica Σ_0 nell'interno di regioni di JORDAN $j \subset J$ sulle quali $\mathfrak{T}$ abbia una oscillazione $\leqslant 1/2N$ e il cui contorno sia formato da due archi di C^*_ν e C^*_σ e da curve γ di costanza per $\mathfrak{T}$ (cfr. nn. 27-31) passanti per punti di C^*_ν e C^*_σ corrispondenti a vertici delle poligonali $\mathfrak{L}_\nu$ e $\mathfrak{L}_\sigma$. Ne avremo una poliedrica Σ_0: $(\mathfrak{T}'', J)$ inscritta nella superficie S_0: $(\mathfrak{T}, J)$ e intanto si ha $a(\Sigma_0) < cl \leqslant l(1/3Nl) = 1/3N$; $(\mathfrak{T}'', C^*_\nu) = (\mathfrak{T}''_{5\nu}, C^*_\nu)$, $(\mathfrak{T}'', C^*_\sigma) = (\mathfrak{T}''_{5\sigma}, C^*_\sigma)$.

Inoltre le faccie della poliedrica Σ_0 hanno tutte diametro $\leqslant c \leqslant 1/2N$. Se u è un punto qualsiasi di J allora u appartiene ad una regione j e ad un continuo $\gamma \subset j$, su cui $\mathfrak{T}$ è costante, congiungente u con un punto $\bar{u}$ di un arco u_1u_2 di C^*_ν (o di C^*_σ), u_1, u_2 essendo punti corrispondenti a vertici consecutivi di $\mathfrak{L}_\nu$ (o $\mathfrak{L}_\sigma$). Si ha $\{\mathfrak{T}(u), \mathfrak{T}''(u)\} \leqslant \{\mathfrak{T}(u), \mathfrak{T}(\bar{u})\} + \{\mathfrak{T}(\bar{u}), \mathfrak{T}''(\bar{u})\} +$ $+ \{\mathfrak{T}''(\bar{u}), \mathfrak{T}''(u)\}$, ove la prima espressione a secondo membro è zero, la seconda è $\leqslant$ al diametro dell'arco u_1u_2 di $\mathfrak{L}$ e perciò $\leqslant c$, la terza è $\leqslant$ allo stesso diametro come distanza tra punti appartenenti a tale arco o a faccie triangolari di Σ_0 inscritte in esso. Pertanto $\{\mathfrak{T}(u), \mathfrak{T}''(u)\} \leqslant 0 + c + c = 2c \leqslant 1/N$.

Possiamo ora definire la trasformazione $(\mathfrak{T}_0, \mathfrak{C})$ stabilendo che sia $\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{T}''_{5\nu}$ in C_ν, $\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{T}''_{5\sigma}$ in C_σ, $\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{T}''$ in $J = \mathfrak{C} - (C_\nu + C_\sigma)$. Essa rappresenta una unica superficie poliedrica Σ avente le seguenti proprietà: 1) Σ è inscritta nella superficie $\mathfrak{S}$; 2) le trasformazioni $\mathfrak{S}$: $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$, Σ: $(\mathfrak{T}_0, \mathfrak{C})$ sono rappresentazioni tipiche per $\mathfrak{S}$ e Σ (S. F., n. 18); 3) $a(\Sigma) = a(\Sigma_\nu) + a(\Sigma_\sigma) + a(\Sigma_0) < L(S_\nu) +$ $+ 1/3N + L(S_\sigma) + 1/3N + 1/3N = L(\mathfrak{S}) + 1/N$; 4) $\{\mathfrak{T}(u), \mathfrak{T}_0(u)\} \leqslant 1/N$ per ogni $u \in \mathfrak{C}$.

Il teorema è completamente dimostrato.

17. – Teorema. *Data una superficie S chiusa non degenere e $L(S) < +\infty$, allora per ogni intero N esiste una superficie poliedrica P inscritta nella S ed esistono rappresentazioni tipiche* (S. F., n. 18) S: (T, C), P: (T_0, C) *sul cerchio unità C con le proprietà seguenti*: 1) $a(P) \leqslant L(S) + 1/N$; 2) $\{T(u), T_0(u)\} \leqslant$ $\leqslant 1/N$ *per ogni* $u \in C$; 3) T *e* T_0 *sono costanti su* C^* *e* $T(C^*) = T_0(C^*)$.

D i m o s t r a z i o n e. Sia S: (T, C) una qualunque rappresentazione della S e sia x_0 il punto $x_0 = (T, C^*)$, essendo T costante su C^*. Sia $\mathfrak{S}$: $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$ la trasformazione associata alla (T, C) (S. F., n. 10). Sappiamo che $L(\mathfrak{S}) = L(S)$ e che la superficie $\mathfrak{S}$ è chiusa non degenere (S. F., n. 10). In forza del n. 16 esistono una superficie poliedrica $\mathfrak{P}$ inscritta nella $\mathfrak{S}$ e convenienti rappresentazioni tipiche (S. F., n. 18) $\mathfrak{S}$: $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{C})$, $\mathfrak{P}$: $(\mathfrak{T}_2, \mathfrak{C})$ con le seguenti proprietà: 1) $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{C}) \sim (\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$; 2) $a(\mathfrak{P}) \leqslant L(\mathfrak{S}) + 1/2N$; 3) $\{\mathfrak{T}_1(u), \mathfrak{T}_2(u)\} \leqslant 1/2N$

per ogni $u \in \mathfrak{C}$; 4) se $[t_1, t_2, \dots, t_n]$ è il reticolato su $\mathfrak{C}$ relativo alla rappresentazione $(\mathfrak{T}_2, \mathfrak{C})$ della poliedrica $\mathfrak{P}$, allora su ogni triangolo t_i la trasformazione $\mathfrak{T}_1$ ha una oscillazione $< 1/2N$. Ciò vale per ogni intero N.

Dalla 1) segue che per ogni intero n esiste un omeomorfismo Ω_n tale che $\{\mathfrak{T}(u), \mathfrak{T}_1(u')\} \leqslant 1/n$ se $u' = \Omega_n(u)$. Poniamo $u_n = \Omega_n(u_\sigma)$. Per una opportuna successione di interi n_k esiste il limite $\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = u_0$. Si noti che, essendo $\{\mathfrak{T}(u_\sigma), \mathfrak{T}_1(u_{n_k})\} \leqslant 1/n_k$ per ogni k, risulta al limite per $k \to \infty$, $\mathfrak{T}(u_\sigma) = \mathfrak{T}_1(u_0)$.

Sia $\delta_k = \{u_{n_k}, u_0\}$, $k = 1, 2, \dots$, onde $\delta_k \to 0$ quando $k \to \infty$. Diciamo $\omega_1(\delta)$ il modulo di continuità della trasformazione $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{C})$. Considerato il cerchio γ'_k di centro u_0 e raggio $2\delta_k$, a questo corrisponde per la Ω_n una regione di JORDAN γ_k racchiudente u_σ. Andremo a modificare l'omeomorfismo Ω_{n_k} entro γ'_k e γ_k in modo che ad u_σ corrisponda u_0 per ogni k. Allo scopo diciamo δ'_k la minima distanza di u_σ da γ^*_k e sia 2ρ il più piccolo dei due numeri δ_k e δ'_k. Consideriamo i due cerchi c, c' di centri rispettivamente u_σ e u_0, raggio ρ ed entrambi giacenti su $\mathfrak{C}$. Allora c è interno a γ_k e c' è interno a γ'_k. Definiamo Ω_k stabilendo che essa coincida con la Ω_{n_k} già considerata fuori di γ_k e γ'_k, coincida con la semplice rotazione ω attorno ad un diametro di $\mathfrak{C}$ che ad u_σ fa corrispondere u_0 e perciò a c fa corrispondere c'. In tal modo Ω_k è già definita sulla frontiera delle regioni, di ordine di connessione uno, $\gamma_k - c$, $\gamma'_k - c'$. Possiamo ora definire Ω_k tra $\gamma_k - c$ e $\gamma'_k - c'$ in modo che essa coincida sulle loro frontiere con l'omeomorfismo già subordinato tra di esse (S. F., n. 19).

Siano ora u, u' punti di $\mathfrak{C}$ con $u' = \Omega_k(u)$, ove Ω_k è l'omeorfismo già modificato. Allora o $u \in \mathfrak{C} - \gamma_k$, $u' \in \mathfrak{C} - \gamma'_k$ e quindi $\{\mathfrak{T}(u), \mathfrak{T}_1(u')\} \leqslant 1/n$ per ipotesi; oppure $u \in \gamma_k$, $u' \in \gamma'_k$ e allora $\{\mathfrak{T}(u), \mathfrak{T}_1(u')\} \leqslant \{\mathfrak{T}(u), \mathfrak{T}(u_\sigma)\} + \{\mathfrak{T}(u_\sigma), \mathfrak{T}_1(u_0)\} + \{\mathfrak{T}_1(u_0), \mathfrak{T}_1(u')\} \leqslant [\omega_1(2\delta_k) + 2/n_k] + 0 + \omega_1(2\delta_k) = 2\omega_1(2\delta_k) + 2/n_k$. Scegliendo convenientemente la successione n_k potremo sempre supporre che $\{\mathfrak{T}(u), \mathfrak{T}_1(u')\} \leqslant 1/k$ e tale relazione vale dunque per ogni u, $u \in \mathfrak{C}$, $u' = \Omega_k(u)$.

Si noti che con la rotazione già usata ω possiamo portare u_σ in u_0. Se diciamo ancora $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ le precedenti trasformazioni $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ combinate con la rotazione ω^{-1}, se diciamo ancora Ω_k l'omeomorfismo prodotto dal precedente omeomorfismo per tale rotazione ω^{-1} avremo anzitutto che $\mathfrak{S}$: $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{C})$, $\mathfrak{P}$: $(\mathfrak{T}_2, \mathfrak{C})$ sono ancora rappresentazioni tipiche di $\mathfrak{S}$ e $\mathfrak{P}$ (S. F., n. 18) e inoltre 1) $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{C}) \sim (\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$; 2) $a(\mathfrak{P}) \leqslant L(\mathfrak{S}) + 1/2N$; 3) $\{\mathfrak{T}_1(u), \mathfrak{T}_2(u)\} \leqslant 1/2N$ per ogni $u \in \mathfrak{C}$; 4) se $[t_1, t_2, \dots, t_n]$ è il reticolato su $\mathfrak{C}$ relativo alla rappresentazione $(\mathfrak{T}_2, \mathfrak{C})$ della poliedrica $\mathfrak{P}$, allora su ogni t_i la trasformazione $\mathfrak{T}_1$ ha una oscillazione $< 1/2N$; 5) se $u' \in \Omega_k(u)$, allora $\{\mathfrak{T}(u), \mathfrak{T}_1(u)\} \leqslant 1/k$; 6) $\mathfrak{T}(u_\sigma) = \mathfrak{T}_1(u_\sigma) = x_0$.

Modifichiamo ora la poliedrica $\mathfrak{P}$. Se il punto u_σ è uno dei vertici del reticolato, nessuna modifica occorre. Se il punto u_σ è interno ad un triangolo t_i, diciamo u_1, u_2, u_3 i vertici di t_i, x_1, x_2, x_3 i punti corrispondenti su $\mathfrak{P}$. Dividiamo t_i in tre triangoli curvilinei t_{i1}, t_{i2}, t_{i3} di vertici $u_0u_1u_2$, $u_0u_2u_3$, $u_0u_3u_1$ mediante linee semplici di JORDAN e rappresentiamo su di essi i triangoli $x_0x_1x_2$, $x_0x_2x_3$, $x_0x_3x_1$ in modo che la nuova rappresentazione dei lati x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1 sugli archi u_1u_2, u_2u_3, u_3u_1 coincida con la rappresentazione subordinata su questi dalla trasformazione $\mathfrak{T}_2$. In modo analogo si proceda se u_0 cade su uno dei lati del reticolato e perciò occorre modificare $\mathfrak{T}_2$ in due triangoli t_i adiacenti. In definitiva si ha una nuova poliedrica $\mathfrak{P}_0$: $(\mathfrak{T}_3, \mathfrak{C})$ ove $\mathfrak{T}_3$ coincide con $\mathfrak{T}_2$ fuori dal triangolo (o dai due triangoli adiacenti) in cui $\mathfrak{T}_2$ è stata modificata. L'area di $\mathfrak{P}_0$ supera quella di $\mathfrak{P}$ al più per l'area di tre (o quattro) triangoli le cui dimensioni sono tutte $\leqslant 1/2N$. Perciò $a(\mathfrak{P}_0) \leqslant a(\mathfrak{P}) + 4(1/4N)(1/2N) < < L(\mathfrak{S}) + 1/2N + 1/2N$. Inoltre $\{\mathfrak{T}_2(u), \mathfrak{T}_3(u)\} \leqslant 1/2N + 1/2N = 1/N$ per ogni $u \in \mathfrak{C}$ e $\mathfrak{T}_3(u_\sigma) = \mathfrak{T}_1(u_\sigma) = \mathfrak{T}(u_\sigma) = x_0$.

Consideriamo infine le trasformazioni S': (T_1, C), Σ': (T_3, C), associate alle $\mathfrak{T}_1$ e $\mathfrak{T}_3$ (S. F., n. 10), ove abbiamo indicato con S' e Σ' le superficie da esse definite. Sia τ la trasformazione di $\mathfrak{C}$ in C di S. F., n. 10. Si ha $L(S') = = L(\mathfrak{S})$, la Σ' è poliedrica inscritta nella S', $a(\Sigma') = a(\mathfrak{P}_0)$ e le trasformazioni (T_1, C), (T_3, C) sono loro rappresentazioni tipiche (S. F., n. 18). Inoltre $a(\Sigma') = a(\mathfrak{P}_0) \leqslant L(\mathfrak{S}) + 1/N = L(S) + 1/N$; 2) $\{T_1(u), T_3(u)\} \leqslant 1/N$ per ogni $u \in C$; 3) T_1 e T_3 sono costanti su C^* e $T_1(C^*) = T_3(C^*) = x_0$; 4) per ogni intero n, posto $\Omega'_k = \tau^{-1}\Omega_k\tau$, Ω'_k è un omeomorfismo di C in sè, identico su C^*, tale che, se $u' = \Omega'_k(u)$, $u \in C$, $u' \in C$, si ha $\{T(u), T_1(u')\} = \{\mathfrak{T}(v), \mathfrak{T}_1(v')\} \leqslant 1/k$, ove v, v' sono convenienti punti di $\mathfrak{C}$ e $v' = \Omega_k(v)$. Da quest'ultima proprietà segue $(T, C) \sim (T_1, C)$ e perciò $S' = S$.

18. – **Dimostrazione del teorema T per superficie S e $\mathfrak{S}$ chiuse non degeneri.** – Sia data la superficie $\mathfrak{S}$ chiusa non degenere. Potremo supporre (n. 2) $L(\mathfrak{S}) < +\infty$. Dal teorema del n. 16 segue l'esistenza, per ogni intero N, di una poliedrica $\mathfrak{P}_N$ inscritta nella $\mathfrak{S}$ tale che 1) $a(\mathfrak{P}_N) \leqslant L(\mathfrak{S}) + 1/N$; 2) $\|\mathfrak{P}_N, \mathfrak{S}\| < 2/N$. Pertanto $\|\mathfrak{P}_n, \mathfrak{S}\| \to 0$ quando $N \to \infty$ e perciò $L^*(\mathfrak{S}) \leqslant \leqslant L(\mathfrak{S})$. Dal n. 2 segue $L^*(\mathfrak{S}) = L(\mathfrak{S})$. Identico ragionamento per una superficie S chiusa non degenere, utilizzando il teorema del n. 17.

19. – **La trasformazione t** [14]. – Siano $a < b$ due numeri reali e $[x_i]$ un gruppo finito o una infinità numerabile di numeri reali a due a due distinti $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots$. Sia $\nu > 1$ un intero qualsiasi tale che $1/\nu < b - a$ e, per

---

[14] L. CESARI, *Parametrizzazione delle superficie continue di area finita secondo* LEBESGUE, Annali di Matematica, (4) **26**, 301-375 (1947); particolarmente pp. 330-332.

ogni numero x_i scegliamo un altro numero reale $\varepsilon_i > 0$ in modo da verificare la condizione $\sum \varepsilon_i = b - a - 1/\nu$, ove la somma è estesa a tutti i valori dell'indice i. Definiamo ora sull'intervallo $0 \leqslant x \leqslant 1$ la seguente funzione: $\varphi(0) = a$, $\varphi(x) = a + x/\nu + \Sigma\varepsilon_i$ per ogni $0 < x \leqslant 1$, ove la sommatoria è estesa a tutti i valori dell'indice i per i quali $0 \leqslant x_i \leqslant x$. Risulta $\varphi(1) = b$ e la funzione $\varphi(x)$ è sempre crescente e continua in tutti i punti di $(0, 1)$ distinti dai punti x_i, $i = 1, 2, \ldots$. Per $x = x_i$ risulta $\varphi(x_i - 0) + \varepsilon_i = \varphi(x_i) = \varphi(x_i + 0)$ e pertanto la $\varphi(x)$ ha una discontinuità di prima specie a sinistra in ciascuno di tali punti. Diciamo α l'insieme aperto dell'intervallo $a \leqslant y \leqslant b$ costituito dagli intervalli $\varphi(x_i) - \varepsilon_i < y < \varphi(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, i quali sono a due senza punti in comune, neppure estremi. Pertanto l'insieme complementare $h = (a, b) - \alpha$ è perfetto. Ogni valore di h è assunto dalla funzione $\varphi(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, una ed una sola volta, ad eccezione dei valori che sono estremi di uno stesso intervallo $[\varphi(x_i) - \varepsilon_i, \varphi(x_i)]$, il primo dei quali è il limite $\varphi(x_i - 0)$. Esiste pertanto la funzione inversa $x = \psi(y)$, $y \in h \equiv (a, b) - \alpha$, definita in tutti i punti di h, ove si convenga di porre $\psi[\varphi(x_i) - \varepsilon_i] = \psi[\varphi(x_i)] = x_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Possiamo inoltre definire la funzione ψ anche sugli intervalli di α, e quindi in tutto (a, b), stabilendo che in ciascuno degli intervalli $[\varphi(x_i) - \varepsilon_i, \varphi(x_i)]$ si abbia $\psi(y) = x_i$. Risulta $\psi(a) = 0$, $\psi(b) = 1$ e la funzione $\psi(y)$ è monotona, non decrescente, costante in tutti e soli gli intervalli di α.

L'equazione t: $x = \psi(y)$, $a \leqslant y \leqslant b$, definisce una trasformazione univoca e continua t dell'intervallo $a \leqslant y \leqslant b$ nell'intervallo $0 \leqslant x \leqslant 1$ che ad ogni intervallo contiguo di h fa corrispondere un punto x_i e ad ogni punto di h non estremo di intervalli contigui di h fa corrispondere un punto x distinto dai punti x_i, $i = 1, 2, \ldots$. Di più a punti distinti di $a \leqslant y \leqslant b$ e non appartenenti ad uno stesso intervallo contiguo di h, punti distinti di $0 \leqslant x \leqslant 1$. Diciamo t^{-1} la trasformazione inversa di t la quale non è univoca su $0 \leqslant x \leqslant 1$, ma è univoca sullo stesso intervallo privato dei punti x_i, $i = 1, 2, \ldots$.

Per ogni intero n poniamo $\psi_n(y) = (1 - 1/n)\psi(y) + (y - a)/n(b - a)$, $a \leqslant y \leqslant b$. Si ha $\psi_n(a) = \psi(a) = 0$, $\psi_n(b) = \psi(b) = 1$. Inoltre $\psi_n(y)$, $a \leqslant y \leqslant b$, è continua e crescente in senso stretto in (a, b) e, per ogni y, $a \leqslant y \leqslant b$, si ha $|\psi(y) - \psi_n(y)| \leqslant 1/n$.

20. – **La trasformazione** T_0 (15). – Sia Q il quadrato $Q \equiv [0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant 1]$ del piano uv, u, v variabili reali, sia R il rettangolo $R \equiv [a \leqslant \xi \leqslant b, c \leqslant \eta \leqslant d]$ del piano $\xi\eta$, ξ, η variabili reali, e siano $[u_i]$, $0 \leqslant u_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots$, $[v_j]$, $0 \leqslant v_j \leqslant 1$, $j = 1, 2, \ldots$, gruppi finiti o numerabili di numeri reali a due a due distinti. Sia $\nu > 1$ un intero arbitrario tale che $1/\nu < b - a$, $1/\nu < d - c$,

(15) L. CESARI, loc. cit. in (14), pp. 332-339.

siano $\varepsilon_i > 0$, h, α, $\xi = \varphi(u)$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $u = \psi(\xi)$, $a \leqslant \xi \leqslant b$, i numeri, gli insiemi e le funzioni definite nel n. 19 relativamente ai numeri reali a, b, $a < b$, e al gruppo $[u_i]$; siano $\varepsilon'_j > 0$, h', α', $\eta = \varphi'(v)$, $0 \leqslant v \leqslant 1$, $v = \psi'(\eta)$, $c \leqslant \eta \leqslant d$, i numeri, gli insiemi e le funzioni relative ai numeri reali c, d, $c < d$, e al gruppo $[v_j]$. Come sappiamo valgono le relazioni $\sum \varepsilon_i = b - a - 1/\nu$, $\sum \varepsilon'_j = d - c - 1/\nu$. Le equazioni T_0: $u = \psi(\xi)$, $v = \psi'(\eta)$, $(\xi, \eta) \in R \equiv (a, b; c, d)$, definiscono una trasformazione continua e univoca del rettangolo $R \equiv [a \leqslant \xi \leqslant b,\ c \leqslant \eta \leqslant d]$ nel quadrato $Q \equiv [0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 1]$.

Sia A l'insieme aperto dei punti $(\xi, \eta) \in R$ per i quali $\xi \in \alpha$, $\eta \in \alpha'$, ossia l'insieme di tutti i rettangoli $[\varphi(u_i) - \varepsilon_i < \xi < \varphi(u_i),\ \varphi'(v_j) - \varepsilon'_j < \eta < \varphi'(v_j)]$, $i, j = 1, 2, \ldots$. Siano B_1, B_2 gli insiemi aperti dei punti $(\xi, \eta) \in R$ per i quali rispettivamente $\xi \in \alpha$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, oppure $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $\eta \in \alpha'$. Pertanto B_1 è l'insieme di tutti i rettangoli $[\varphi(u_i) - \varepsilon_i < \xi < \varphi(u_i),\ 0 \leqslant \eta \leqslant 1]$, $i = 1, 2, \ldots$, e B_2 è l'insieme di tutti i rettangoli $[0 \leqslant \xi \leqslant 1,\ \varphi'(v_j) - \varepsilon'_j < \eta < \varphi'(v_j)]$, $j = 1, 2, \ldots$. Siano gli insiemi $B = B_1 + B_2$, $K = Q - B$. Manifestamente $A = B_1 B_2$, $A \subset B$ e K è perfetto. Ad ogni punto $(\xi, \eta) \in A$ la T_0 fa corrispondere un punto (u_i, v_j), $i, j = 1, 2, \ldots$, di Q; ad ogni punto $(\xi, \eta) \in B - A$ la T_0 fa corrispondere un punto (u_i, v) con $v \neq v_j$, $j = 1, 2, \ldots$, di Q, oppure un punto (u, v_j) con $u \neq u_i$, $i = 1, 2, \ldots$, di Q; ad ogni punto (ξ, η) di K la T_0 fa corrispondere un punto (u, v) di Q con $u \neq u_i$, $v \neq v_j$, $i, j = 1, 2, \ldots$.

Diciamo T_0^{-1} la trasformazione inversa della T_0, la quale non è univoca nel quadrante Q, ma è univoca nel quadrato Q privato dei punti (u_i, v_j), $i, j = 1, 2, \ldots$, nonchè dei segmenti $[u = u_i,\ 0 \leqslant v \leqslant 1]$, $i = 1, 2, \ldots$, e $[0 \leqslant u \leqslant 1,\ v = v_j]$, $j = 1, 2, \ldots$.

Diciamo $\psi_n(\xi)$, $a \leqslant \xi \leqslant b$, $\psi'_n(\eta)$, $c \leqslant \eta \leqslant d$, le funzioni analoghe a quelle definite nel n. 19, relativamente alle funzioni $\psi(\xi)$, $a \leqslant \xi \leqslant b$, $\psi'(\eta)$, $c \leqslant \eta \leqslant d$.

21. – Sia (T, Q) una data trasformazione, definita e continua nel quadrato Q, T: $x^{(i)} = x^{(i)}(u, v)$, $i = 1, 2, 3$, $(u, v) \in Q \equiv [0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 1]$. Con le notazioni precedenti diciamo T_1 la trasformazione $T_1 = T T_0$, cioè (T_1, R): $x^{(i)} = x^{(i)}[\psi(\xi), \psi'(\eta)]$, $i = 1, 2, 3$, $(\xi, \eta) \in R \equiv [a \leqslant \xi \leqslant b,\ c \leqslant \eta \leqslant d]$. La trasformazione T_1 è definita e continua nel rettangolo R.

Dimostriamo che $T_1 \sim T$. Diciamo $\omega(\delta)$ il modulo di continuità della trasformazione (T, Q). Per ogni intero n, consideriamo l'omeomorfismo Ω_n di R in Q così definito: $u = \psi_n(\xi)$, $v = \psi'_n(\eta)$, $(\xi, \eta) \in R$. Se $(u, v) = \Omega_n(\xi, \eta)$, allora $u = \psi_n(\xi)$, $v = \psi'_n(\eta)$ e, posto $\bar{u} = \psi(\xi)$, $\bar{v} = \psi'(\eta)$ si ha $|u - \bar{u}| \leqslant 1/n$, $|v - \bar{v}| \leqslant 1/n$, $\{(u, v), (\bar{u}, \bar{v})\} < 2/n$ e quindi $\{T(u, v), T_1(\xi, \eta)\} = \{T(u, v), T(\bar{u}, \bar{v})\} + \{T(\bar{u}, \bar{v}), T_1(\xi, \eta)\} \leqslant \omega(2/n) + 0$. Poichè tale relazione vale per ogni punto $(\xi, \eta) \in R$ e l'ultima espressione tende a zero quando $n \to \infty$, risulta dimostrato che $(T_1, R) \sim (T, Q)$.

22. – **Le superficie S qualsiasi.** – Richiamo qui i risultati di un precedente lavoro ([16]).

Sia S una superficie qualsiasi di E_3 con $L(S) < +\infty$. Allora esiste una rappresentazione (T, Q): $x^{(i)} = x^{(i)}(\xi, \eta)$, $i = 1, 2, 3$, $(\xi, \eta) \in Q \equiv (0, 1, 0, 1)$ avente le seguenti proprietà:

1) Per ogni intero N si può dividere Q in regioni poligonali J_i, $i = 1, 2, ..., m$, J'_i, $i = 1, 2, ..., m'$, $Q = \Sigma J_i + \Sigma J'_i$, le cui frontiere saranno indicate con $J^*_i = [\pi^*_{i0}, \pi^*_{i1}, ..., \pi^*_{i\nu_i}]$, $J'^*_i \equiv [\pi'^*_{i0}, \pi'^*_{i1}, ..., \pi'^*_{i\nu'_i}]$ e ove i poligoni π_{is}, π'_{is} sono tutti rettangoli a lati paralleli agli assi ξ, η. Tali regioni J_i, J'_i sono a due a due senza punti interni in comune. Inoltre è $\pi_{10} = Q$, oppure $\pi'_{10} = Q$.

2) La trasformazione T è costante su tutte le poligonali π^*_{is}, π'^*_{is}, $s = 0, 1, 2, ..., \nu_i$, (ν'_i), $i = 1, 2, ..., m$ (m'), ad eccezione al più del caso in cui $\pi_{10} = Q$, in cui può accadere che T non sia costante su $\pi^*_{10} = Q^*$.

3) Esistono m' superficie poliedriche Σ'_i e relative rappresentazioni Σ'_i: (P'_i, J'_i), $i = 1, 2, ..., m'$, tali che 3*a*) Σ'_i è inscritta nella superficie S'_i: (T, J'_i) e le trasformazioni S'_i: (T, J'_i), Σ'_i: (P'_i, J'_i) danno rappresentazioni tipiche (S. F., n. 18) delle S'_i e Σ'_i; 3*b*) $a(\Sigma'_i) = 0$; 3*c*) P'_i è costante su ciascuna poligonale π'^*_{is} e $P'_i(\pi'^*_{is}) = T(\pi'^*_{is})$, $s = 0, 1, 2, ..., \nu'_i$; 3*d*) $\{ P'_i(\xi, \eta), T(\xi, \eta) \} \leqslant 1/N$ per ogni $(\xi, \eta) \in J'_i$, $i = 1, 2, ..., m'$.

4) Esistono m superficie S_i e relative rappresentazioni S_i: (T_i, q) sul quadrato ausiliario $q \equiv [0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 1]$ ed inoltre m trasformazioni T_{0i}, del tipo definito nel n. 20, tali che, indicati con R_i il relativo rettangolo, A_i, B_i i relativi insiemi aperti, K_i gli insiemi perfetti, $A_i \subset B_i \subset R_i$, $B_i + K_i = R_i$ (n. 20), si ha 4*a*) $\pi_{i0} = R_i$; 4*b*) i rettangoli π_{is}, $s = 1, 2, ..., \nu_i$, sono altrettanti componenti di A_i; 4*c*) posto $T_{1i} = T_i T_{0i}$, si ha $(T_{1i}, R_i - A_i) = (T, R_i - A_i)$; 4*d*) $\{ T_{1i}(\xi, \eta), T(\xi, \eta) \} \leqslant 1/2N$ per ogni $(\xi, \eta) \in J_i$; 4*e*) $\sum L(S_i) \leqslant L(S)$ ove la somma è estesa ai valori $i = 1, 2, ..., m$, dell'indice; 4*f*) le superficie S_i sono chiuse non degeneri, ad eccezione al più di S_1 che è aperta non degenere, oppure di tipo A se $\pi_{10} = Q$ e T non è costante su π^*_{10} (comma 2); 4*g*) le superficie S_i dipendono solo dalla superficie S e le rappresentazioni S_i: (T_i, q) sono prefissate arbitrarie rappresentazioni di esse su q; allora i punti (u_{is}, v_{is}), $s = 1, 2, ..., \nu_i$, che per la T^{-1}_{0i} corrispondono ai rettangoli π_{is}, $s = 1, 2, ..., \nu_i$, sono punti qualsiasi di ben determinati continui g_{is}, $s = 1, 2, ..., \nu_i$, della collezione $G(T_i, q)$ (S. F., n. 3).

23. – Teorema. *Se S: (T_0, J), J regione semplice di* JORDAN, *è una superficie qualsiasi dello spazio E_3, se $L(S) < +\infty$, allora esiste una superficie polie-*

([16]) L. CESARI, loc. cit. in ([14]), pp. 350-374.

drica Σ *inscritta nella* S *e rappresentazioni tipiche* (S. F., n. 18) S: (T, Q), Σ: (P, Q') *sul quadrato fondamentale* $Q \equiv [0 \leqslant \xi \leqslant 1,\ 0 \leqslant \eta \leqslant 1]$ *tali che* 1) $a(\Sigma) \leqslant L(S) + 1/N$; 2) $\{ T(\xi, \eta), P(\xi, \eta) \} \leqslant 1/N$ per ogni $(\xi, \eta) \in Q'$, *ove* Q' *è un poligono contenuto in* Q; 3) *quando non sia* $Q' \equiv Q$, *allora* $Q - Q'$ *può dividersi in poligoni semplici* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\mu$ *mediante poligonali semplici congiungenti* Q^* *con* Q'^* *a due a due senza punti in comune in* $(Q - Q')_0$ *e in modo che in ciascun poligono* γ_i *la trasformazione* T *ha una oscillazione* $< 1/N$.

D i m o s t r a z i o n e. Sia S una superficie qualunque con $L(S) < +\infty$. Applichiamo il teorema del n. 22 e consideriamo la superficie S_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. In forza del n. 18, nonchè del n. 22, 4, esistono corrispondenti poliedriche $\overline{\Sigma}_i$ e rappresentazioni tipiche S_i: $(\overline{T}_i, q)$, $\overline{\Sigma}_i$: $(\overline{P}_i, q)$ delle superficie S_i e $\overline{\Sigma}_i$ tali che *a*) $a(\overline{\Sigma}_i) < L(S_i) + c^2$; *b*) $\{ \overline{T}_i(u, v), \overline{P}_i(u, v) \} \leqslant c$ per ogni $(u, v) \in q$; *c*) $\overline{T}_i$ e $\overline{P}_i$ sono costanti su q^* e $\overline{T}_i(q^*) = \overline{P}_i(q^*)$, ove per c si assuma $c = \min [((2 + 48\nu_i)mN)^{-1/2}, 1/8N]$. Nel caso eccezionale $i = 1$, $\pi_{10} = Q$, T non costante su $\pi_{10}^* = Q_{i0}^*$, allora anche $\overline{T}_i$ è non costante su q^* e sarà $\overline{\Sigma}_1$: $(\overline{P}_1, q')$ ove $q' \subset q$ è un poligono e $q - q'$ gode della proprietà 3) del testo (n. 13).

In forza del n. 9 esisteranno allora nuove superficie poliedriche Σ_i e relative rappresentazioni Σ_i: (P_i, q) tali che 1) $a(\Sigma_i) < L(S_i) + 2c^2 + 48\nu_i c_i^2 \leqslant L(S_i) + 1/mN$; 2) le trasformazioni S_i: (T_i, q), Σ_i: (P_i, q) sono rappresentazioni tipiche delle superficie S_i e Σ_i e ove le trasformazioni (T_i, q) sono quelle del n. 22, 4; 3) $\{ T_i(u, v), P_i(u, v) \} \leqslant 4c_i \leqslant 1/2N$ per ogni $(u, v) \in q$; 4) T_i e P_i sono costanti su q^* e $T_i(q^*) = P_i(q^*)$; 5) i punti (u_{is}, v_{is}), $s = 1, 2, \ldots, \nu_i$, (n. 22, 4*g*) sono vertici del reticolato relativo alla trasformazione (P_i, q) e $P_i(u_{is}, v_{is}) = T_i(u_{is}, v_{is})$, $s = 1, 2, \ldots, \nu_i$. Nel caso eccezionale visto sopra valgono analoghe considerazioni.

Poniamo $P_{1i} = P_i T_{0i}$, $T_{1i} = T_i T_{0i}$, ove T_{0i} sono le trasformazioni del n. 22, 4. Allora si ha S_i: (T_{1i}, R_i), Σ_i: (P_{1i}, R_i) (n. 20) e queste sono ancora rappresentazioni tipiche delle superficie S_i e Σ_i, come si vede dalla definizione delle trasformazioni T_{0i} (n. 20) e dalla proprietà 5) vista sopra. Dal n. 22, 4*a*, 4*b* segue che π_{i0}^*, π_{is}^*, $s = 1, 2, \ldots, \nu_i$, fanno parte della frontiera di $R_i - A_i$ e perciò (n. 22, 4*c*) $T_{1i}(\pi_{is}^*) = T(\pi_{is}^*)$, $s = 1, 2, \ldots, \nu_i$. Dalla proprietà 4) segue ora $P_{1i}(\pi_{i0}^*) = T_{1i}(\pi_{i0}^*)$ e dalla proprietà 5) e dal n. 22, 4*g*, anche $P_{1i}(\pi_{is}^*) = T_{1i}(\pi_{is}^*)$, $s = 1, 2, \ldots, \nu_i$. Pertanto 6) $T_{1i}(\pi_{is}^*) = P_{1i}(\pi_{is}^*) = T(\pi_{is}^*)$, $s = 0, 1, 2, \ldots, \nu_i$. Di più 7) T_{1i} e P_{1i} sono anche costanti su ciascuno dei componenti di A_i e, in particolare, su ciascun rettangolo π_{is}, $s = 1, 2, \ldots, \nu_i$.

Dal n. 22, 3*c* e dalla proprietà 6) segue ora che P_{1i} e P_i' sono costanti e uguali tra loro (perchè uguali alla T) su ciascuna poligonale π_{is}^* (o $\pi_{is}'^*$) separante campi J_i con campi J_i'. Pertanto le poliedriche Σ_i nelle rappresentazioni Σ_i: (P_{1i}, J_i) e le poliedriche Σ_i' nelle rappresentazioni Σ_i': (P_i', J_i'), formano una unica poliedrica Σ: (P, Q), inscritta nella superficie S: (T, Q) e le rappresentazioni indicate sono tipiche.

Dalla proprietà 1) e dal n. 22, $3b$, $4c$ segue $a(\Sigma) = \Sigma_{i=1}^{m} a(\Sigma_i) + \Sigma_{i=1}^{m'} a(\Sigma'_i) \leqslant \leqslant \Sigma_{i=1}^{m} L(S_i) + m(1/mN) + 0 \leqslant L(S) + 1/N$.

Ogni punto $(\xi, \eta) \in J_i$ è in $R_i \equiv \pi_{i0}$ ma non è interno a rettangoli π_{is}, $s = 1, 2, \dots, \nu_i$, e quindi $T_{1i}(\xi, \eta) = T_i(u, v)$, $P_{1i}(\xi, \eta) = P_i(u, v)$, ove (u, v) è un opportuno punto di q. Per la proprietà 3) si ha $\{ T_{1i}(\xi, \eta), P_{1i}(\xi, \eta) \} = \{ T_i(u, v), P_i(u, v) \} \leqslant 1/N$. Dal n. 22, $4d$ segue ora $\{ P_{1i}(\xi, \eta), T(\xi, \eta) \} \leqslant \leqslant \{ P_{1i}(\xi, \eta), T_{1i}(\xi, \eta) \} + \{ T_{1i}(\xi, \eta), T(\xi, \eta) \} \leqslant 1/2N + 1/2N = 1/N$ per ogni $(\xi, \eta) \in J_i$. Da questa relazione e dal n. 22, $3d$ relativa ai campi J'_i risulta ora $\{ P(\xi, \eta), T(\xi, \eta) \} \leqslant 1/N$ per ogni $(\xi, \eta) \in Q$. Il teorema è così completamente dimostrato. Nel caso eccezionale valgono considerazioni analoghe, riuscendo Σ: (P, Q'), $Q' \subset Q$, e vale la 3) del testo.

24. – Dimostrazione del teorema T per superficie S qualsiasi. – Sia S una superficie qualsiasi con $L(S) < +\infty$. Allora per ogni N esiste una superficie Σ_N poliedrica inscritta nella S con $a(\Sigma_N) < L(S) + 1/N$, $\|S, \Sigma_N\| < 1/N$. Quando $N \to \infty$, risulta $\|S, \Sigma_N\| \to 0$ e perciò $L^*(S) \leqslant L(S)$. Dal n. 1 segue allora $L^*(S) = L(S)$.

Università di Bologna e *The Ohio State University*.