
LEONIDA TONELLI

(19 aprile 1885 – 12 marzo 1946) (*).

Lettori!

Giorno di dolore e di lutto profondo per la Matematica italiana e mondiale rimarrà il 12 marzo 1946, nel quale veniva prematuramente rapito alla Scienza e alla Vita il sommo Matematico **LEONIDA TONELLI**.

Permettete ora che io, Suo modesto scolaro, commemori — per designazione della eletta Compagna di Lui — questo grande Maestro (**). Dapprima cercherò di dare una visione della Sua personalità superiore: tratterò il Suo « Curriculum Vitae » e delinearò separatamente i tre aspetti principali, in Lui armoniosamente fusi, di « Uomo integro, forte e coraggioso », di « Maestro luminoso, paterno e volitivo », di « Scienziato sommo ». Indi darò uno sguardo alla Sua Opera matematica di valore inestimabile, fondamento per i futuri progressi, miniera d'oro per le nuove generazioni. Alla fine riporterò l'elenco delle Sue Pubblicazioni.

(*) Commemorazione a cura di ANTONIO MAMBRIANI.

(**) Precedenti commemorazioni italiane sono le seguenti:

S. CINQUINI, *Leonida Tonelli*. Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. **79** [oppure (3) **10**], 73-95 (1946).

L. CESARI, *Leonida Tonelli* (1885-1946). Boll. Un. Mat. Ital. (3) **1**, 64-67 (1946).

L. GIULIANO, *Un grande matematico: Leonida Tonelli*. Il Mattino dell'Italia centrale, anno I, n. 31 (mercoledì 12 marzo 1947).

S. FAEDO, *Leonida Tonelli*. Rend. Mat. Roma (5) **6**, 217-225 (1947).

G. SANSONE, *L'opera scientifica di Leonida Tonelli*. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **4**, 594-624 (1948).

1. - Una visione della Personalità di Leonida Tonelli.

1.1. - Il "Curriculum Vitae".

LEONIDA TONELLI nacque il 19 aprile 1885 a Gallipoli (Lecce) da Genitori veneti: il Padre **GASPARE** (1834-1903) era ufficiale superiore nell'esercito, la Madre **GIUSEPPINA BICHI** (1856-1920) era donna di rara bellezza e bontà (*). Per ragioni dipendenti dall'impiego paterno, **Egli** passò la fanciullezza e compì gli studi in varie città d'Italia (fra le quali Lecce, Pesaro, Pavia). A soli 17 anni, nel 1902, iniziò in Bologna gli studi universitari: si iscrisse dapprima al biennio propedeutico d'Ingegneria, poi passò in Matematica pura, ed ebbe a Maestri **CESARE ARZELÀ**, **SALVATORE PINCHERLE**, **FEDERICO ENRIQUES**, **LUIGI DONATI**; e nel 1907 si laureò con lode, discutendo la Tesi con l'**ARZELÀ**. **Egli** venne concordemente giudicato — come ebbe a ricordarmi parecchi anni dopo il **PINCHERLE** — *un giovane di intelligenza eccezionale*, e subito fu nominato assistente nella Università di Bologna. In tale posizione il **TONELLI** dovette sottoporsi per alcuni anni ad una forte, eccessiva attività didattica; ma l'attività scientifica seppe non essere inferiore, in quanto **Egli** conseguì in tale periodo risultati matematici di prim'ordine. Poteva così ottenere brillantemente a 25 anni, cioè solo tre anni dopo il conseguimento della Laurea, la libera docenza in Analisi infinitesimale. Dopo altri tre soli anni (nel 1913) venne giudicato primo alla unanimità nel concorso per la cattedra di Analisi algebrica nella Università di Cagliari; successivamente (1914) partecipò anche, riuscendo primo trionfalmente, al concorso per la cattedra di Analisi infinitesimale nella Università di Parma.

Nel 1916, ancora professore straordinario a Parma, appena l'Italia venne trascinata nella prima grande guerra mondiale, **Egli** sentì imperioso il Suo dovere verso la Patria: interruppe la Sua intensa e fruttuosa attività di studio, si sottopose spontaneamente ad un'operazione e, vincendo le amorevoli resistenze della Madre adorata, partì volontario per la guerra. Fu in Macedonia (settore del Kruska Balkan e settore di Monastir), dove passò due inverni assai duri e fu preso dalle febbri malariche; nella primavera del 1918 venne trasferito sul fronte delle Alpi (Giudicarie, Val Daone, Adamello); non accettò

(*) Il **TONELLI** ebbe un fratello, **EPAMINONDA**, più giovane di Lui, morto all'età di due anni e mezzo; ebbe anche tre sorelle: **EMMA** (sposatasi a **SUARDI**) maggiore di Lui, **PALMIRA** (sposatasi a **DEL VECCHIO**) e **OLGA** (sposatasi a **RAVARA**) più giovani di Lui.

licenze; ebbe due encomi solenni (*), la croce al merito di guerra, una medaglia al valor militare con splendida motivazione (**), una promozione per meriti eccezionali a Tenente, un'altra promozione per meriti eccezionali a Capitano; fu in tutto — come scrisse il Suo Generale — *un Ufficiale di qualità veramente eccezionali.*

Nel 1919, conclusasi vittoriosamente la guerra, **Egli** faceva silenziosamente — e finalmente — ritorno alla Sua cattedra universitaria di Parma (***), dove era diventato professore ordinario fin dal 1917. Cogliendo i frutti di lunghe meditazioni fatte nelle soste di guerra, **Egli** si accinse ad approfondire e ad allargare i Suoi brillanti studi precedenti su il Calcolo delle Variazioni, cercando di creare le solide basi di un trattato su tale argomento.

Affermatosi il fascismo in Italia, **Egli** fu uno dei promotori e firmatari del ben noto « manifesto degli Intellettuali » di opposizione al fascismo, e ciò ebbe a disturbare grandemente la catena dei giusti riconoscimenti nazionali ai Suoi meriti superiori. Così, per tutto il periodo del fascismo, **Egli** non potè mai entrare nelle commissioni dei concorsi universitari.

Nella primavera del 1922 il Suo Maestro PINCHERLE insistette per averlo a Bologna, a quella Università che Lo aveva avuto allievo, e quale Allievo! Bologna offerse al **TONELLI** la cattedra di Analisi superiore; **Egli** poi tenne per incarico, a turno con il PINCHERLE, i corsi di Analisi algebrica e di Analisi infinitesimale fino al 1927. Inoltre ebbe pure, fino a tale anno, gli incarichi dei due corsi di Analisi algebrica e infinitesimale nella Università di Ferrara. L'attività scientifica del **TONELLI** aveva negli anni 1921 e 1923 una sorprendente, e direi miracolosa, esplicazione: uscivano per le stampe i Suoi due meravigliosi Volumi (di ben complessive 1141 pagine) dal titolo *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, vera Opera monumentale che tanta eco ha avuto in Italia e nel Mondo. Intanto questa superiore attività scientifica del **TONELLI** riceveva qualche alto riconoscimento: nel 1922 l'Accademia Nazionale dei Lincei lo nominava Suo Socio corrispondente, nel 1923 la Società Italiana delle Scienze, detta dei XL, Gli consegnava la medaglia d'oro, nel 1925 l'Accademia Nazionale dei Lincei Gli conferiva il premio reale per la Matematica.

Il **TONELLI** nel 1924 partecipò, insieme al PINCHERLE, al Congresso Inter-

(*) Un encomio dal Comandante della 35^a Divisione, Generale PETITTI di Roreto; e un encomio dal Comandante dell'artiglieria della 7^a Armata, Generale BAISTROCCHI.

(**) Ecco la motivazione: « A capo di un'audacissima pattuglia, portava arditamente lo scoppiglio fra le truppe nemiche in ritirata, catturando reparti e materiali e, primo fra tutti, issava la bandiera d'Italia in Mezzolombardo, facendovi prigioniero un comandante di Divisione austriaca. » (Regio decreto 4 gennaio 1920.)

(***) Ricordiamo che nel 1935 fu promosso per meriti speciali a Maggiore e poi nel 1940 venne promosso per anzianità a Tenente Colonnello.

nazionale dei Matematici a Toronto, nel Canada: là **Egli** espose, per la prima volta in un Congresso mondiale, le sue importanti idee innovatrici su il Calcolo delle Variazioni; e ritornò in Italia soddisfatto, anche perchè, in seguito a Sua iniziativa, il Suo Maestro PINCHERLE era stato nominato presidente del successivo Congresso Internazionale, che venne fissato per il 1928 a Bologna.

Nel 1926 il **TONELLI** conobbe, fra le partecipanti a un Convegno svoltosi in Bologna, la Signorina MARIA RONDELLI, dottoressa in Scienze Naturali, Colei che doveva diventare la affettuosa e intelligente Compagna della Sua Vita. Il matrimonio fu celebrato il 5 settembre 1927, e il 10 giugno 1928 nasceva il primo figlio, GIORGIO, ora già dottore in Filosofia.

Nella prima decade del settembre 1928 ebbe luogo in Bologna il Congresso Internazionale dei Matematici presieduto dal PINCHERLE, ed il **TONELLI** vi occupò, fra i moltissimi valenti matematici, venuti da tutte le parti del mondo, una posizione di primo piano. Nell'autunno del 1928, quando il PINCHERLE fu collocato a riposo, il **TONELLI** passò alla cattedra di Analisi infinitesimale lasciata vacante dal PINCHERLE e tenne per incarico il corso di Analisi superiore e i corsi di Istituzioni di Matematiche per gli studenti di Chimica e di Scienze Naturali. In questo stesso anno 1928 **Egli** diede alle stampe un'altra Opera fondamentale dal titolo *Serie trigonometriche*.

Nel 1930 il **TONELLI** venne invitato con molta insistenza a Pisa per tenere alta la tradizione matematica della Scuola Normale Superiore. Mi ricordo — io allora Gli ero vicino, come Suo assistente — le molte riflessioni che **Egli** fece al pensiero di doversi trasferire con la Famiglia a Pisa. Si sentiva ormai troppo legato a Bologna, dove aveva trascorsa tanta parte della Sua giovinezza come studente universitario e come assistente, dove copriva la cattedra prima tenuta dai Suoi valenti Maestri, dove si era creati affetti e amicizie profonde, dove aveva incontrata la Sua diletta Compagna e, ancora, dove aveva stampato i Suoi importanti Volumi. Si decise a lasciare Bologna, più che per qualche lusinga economica, per l'idea di creare nella Scuola Normale Superiore di Pisa una grande fucina di allievi, ciò che, anche nelle più rosee speranze, non sarebbe stato possibile realizzare a Bologna. Appena il **TONELLI** fu a Pisa, in Italia tutti sentimmo che solo così la Scuola Normale Superiore di Pisa poteva avere la certezza di raggiungere lo splendore degli anni rosei in cui vi erano il DINI e il BIANCHI. Primi cura del **TONELLI**, a Pisa, fu quella di rivolgersi agli *Annali della Scuola Normale Superiore* (Sezione Matematica e Fisica): ne assunse la direzione e tanto si adoprò da creare in brevissimo tempo una delle più apprezzate riviste del mondo. Nell'Università di Pisa **Egli** ebbe la cattedra di Analisi infinitesimale e l'incarico di Analisi superiore; nella Scuola Normale Superiore si prodigò in corsi di lezioni, complementari a quelli della Università, rivolti ad accrescere la cultura dei giovani allievi e ad avviare alla ricerca matematica, così che in poco tempo

gli studi scientifici della Scuola Normale Superiore si accesero del più vivo fervore. Nella Scuola di Perfezionamento in Scienze assicurative, della Università di Pisa, tenne anche l'incarico di Calcolo delle probabilità con applicazioni. Nei primi anni della Sua residenza pisana la Società Italiana delle Scienze, detta dei XL, lo nominò suo Socio e l'Accademia delle Scienze di Torino Gli conferì il premio internazionale BRESSA.

Nel 1939 l'Università di Roma invitò con molta insistenza il **TONELLI** alla Cattedra di Analisi matematica. Egli finì con l'accettare, e fu anche per un anno professore aggregato all'Istituto Nazionale di Alta Matematica nella Università di Roma. Non volle però abbandonare i Suoi cari allievi della Scuola Normale Superiore: decise di lasciare a Pisa la Sua Famiglia — la quale il 17 dicembre 1939 si accresceva della graziosa bimba PIETTINA — e si sobbarcò coraggiosamente alla logorante fatica di viaggi continuati fra Pisa e Roma. Nel 1942 (dopo tre anni di insegnamento a Roma) per diverse cause, e non ultima quella del peggioramento dei trasporti ferroviari dovuto al divampare della guerra, dovette decidersi a lasciare la cattedra di Roma. Nella sezione, staccata a Pisa, della Facoltà di Economia e Commercio di Firenze Egli accettò, poi, l'incarico di Matematica generale.

Intanto la terribile guerra aveva raggiunto in pieno il suolo d'Italia ed era arrivata, purtroppo, con tutti i suoi orrori, fino a Pisa. Il **TONELLI**, approfittando della Sua dimora di campagna ad Asciano Pisano (nella quale si dovette rifugiare con continuità dopo che le bombe Gli distrussero completamente, nel 31 agosto 1943, l'abitazione di Pisa) poté appoggiare attivamente, a disprezzo di non pochi rischi, la guerra contro i tedeschi ingaggiata dai partigiani. Spinto, poi, dal supremo bene per la Scuola Normale Superiore seriamente minacciata dai tedeschi che l'occupavano, Egli, facendo tacere i Suoi sentimenti, nell'ottobre 1943 accettò dal governo fascista, rifugiato a Salò, la nomina a Direttore della Scuola stessa. Fu certamente per il **TONELLI** un sacrificio assai grande, compensato solo dall'alto scopo che voleva ottenere e che Gli riuscì pienamente di raggiungere: Egli, coadiuvato dalla affettuosa collaborazione di discepoli e colleghi, poté fare pressione sui tedeschi, i quali nel dicembre 1943 lasciavano finalmente libera la Scuola Normale; così rimaneva salvo tutto il prezioso materiale scientifico, artistico e didattico della Scuola. E quasi per nascondere sempre più al nemico i Suoi riposti sentimenti, nel 1944 Egli accettava anche un premio accordato Gli dalla fascista Accademia d'Italia.

Arrivò finalmente il giorno della liberazione dal fascismo e dal tedesco invasore. La gioia per il **TONELLI** fu immensa, ma quali e quanti sacrifici fisici, morali e di studio era costata a Lui questa duplice liberazione tanto agognata! A riconoscimento degli alti meriti civili acquisiti, Egli venne nominato Vice-Sindaco della Città di Pisa e Presidente dell'Ente Comunale di assi-

stenza: in tali uffici si adoprò, senza risparmio della persona, per accelerare i tempi di ripresa della martoriata vita cittadina. Ma non mancarono — è assai duro dirlo — quelli che, vilmente tramando nell'ombra per il trionfo di personali egoismi e rancori, cercarono in tutti i modi di falsare la grande opera di sacrificio e di umanità di tanto Uomo!

Nel novembre 1945 Egli riprendeva con energia le sue care attività didattiche e scientifiche. Ma la forte tempra di Lui nell'inverno 1946 veniva, purtroppo, attaccata da una maligna forma influenzale, che Gli acuiava un disturbo renale di cui era da più anni sofferente. In una fredda e triste sera, la sera del 12 marzo 1946, in Pisa, la grande ANIMA santamente ci lasciava! E ancora non pare vero! Le Sue spoglie mortali riposano in Pisa, accanto a quelle di ULISSE DINI e di LUIGI BIANCHI, nell'austero Cimitero Monumentale, presso la meravigliosa Piazza dei Miracoli.

Sia gloria a Lui nei Cieli e sia pace in Terra alla Sposa, ai due Figli, alle Sorelle!

1.2. - L'Uomo integro, forte e coraggioso.

Il **TONELLI** fu di animo leale, di carattere forte, di spirito acuto, di cuore nobile. Cordialissimo verso gli amici, pei quali si prestò sempre con grande disinteresse e senza badare a sacrifici, fu invece decisamente e apertamente ostile verso tutti quelli che gli mancarono di lealtà. I doveri civili, di Patria e di Famiglia furono costantemente Suoi altissimi ideali, per essi s'adoprò sopportando sempre serenamente disagi e rischi. Nello studio Egli fu un lavoratore instancabile e metodico.

Ecco alcune affermazioni di scolari, di colleghi e di ammiratori.

— «... benevolo e fraterno verso gli amici, implacabile verso coloro che non meritavano la Sua stima, ha sempre teso verso il Giusto, l'Onesto, il Bene, senza mai piegarsi, pronto ad andare incontro a qualunque difficoltà e pericolo ed a sacrificare anche tutto, pur di non cedere neppure in un punto, al calcolo e al compromesso.» (L. CESARI.)

— «Nelle questioni morali non ammetteva compromessi e non era disposto ad indulgere anche a costo di amarezze, che non Gli mancarono, specie nell'ultimo anno della Sua Vita: Egli giudicava uomini e fatti con serena imparzialità e assoluta giustizia.» (G. SANSONE.)

— «Aveva bontà non inconsciamente uniforme, ma sempre ispirata alla più grande giustizia.» (S. CINQUINI.)

— «Di carattere forte e deciso, si schierò sempre dalla parte della giustizia e dell'onestà contro ogni sopraffazione e contro ogni sopruso. Fu severo giudice

di chi alterava la verità e di chi voleva trionfare con metodi nascosti e tortuosi. Ebbe innato il senso del dovere: al richiamo della Patria, nel 1915, partì volontario, sottoponendosi, spontaneamente, a una operazione chirurgica e raggiunse il fronte, in prima linea; per il Suo eroico comportamento si meritò due medaglie al valore e due promozioni per merito di guerra. Il Suo carattere fiero e austero non Gli permise di piegarsi, durante il triste periodo fascista, al conformismo del tempo, e fu, per questo, messo in disparte, se non avvertito e angariato; non Gli si volle perdonare di avere fra i primi, firmando il manifesto CROCE, alto levata la voce di protesta degli intellettuali per l'oppressione delle coscienze a cui molti purtroppo si piegarono. Ma sempre sperò che presto sarebbe sorta l'alba dei tempi nuovi, l'alba della libertà per le coscienze mortificate. » (L. GIULIANO.)

— « Carattere forte e fiero, Egli aveva altissimo il senso del dovere verso la Scienza, la Patria e la Scuola, e nella Sua vita non conobbe mai le mezze misure, ma seguì fino in fondo ciò che Gli dettava la Sua rigida coscienza, in tutte le manifestazioni della Sua personalità. » (S. FAEDO.)

— « Fu in guerra un Ufficiale di qualità veramente eccezionali. » (Un Suo Generale nell'Esercito).

— « Fu Marito e Padre esemplare, di una purezza e di una austerità adamantina. » (L. CESARI.)

— « Fu difensore della Verità e della Giustizia. » (Il Rappresentante della Città di Pisa, nel 1946.)

1.3. — Il Maestro luminoso, paterno e volitivo.

Il **TONELLI** fu Maestro di doti veramente singolari!

Le Sue Lezioni, sempre ascoltate nel più religioso silenzio e vivificate dalla Sua parola incisiva e suadente, avvincevano per la loro grande chiarezza e logicità, e cose astruse diventavano inaspettatamente chiare ed attraenti.

Usava incitare paternamente i Suoi allievi allo studio, pretendendo da essi la precisione e il rigore. Verso i giovani che riusciva ad avviare alla ricerca scientifica sentiva una particolare simpatia, e spesso mostrava la Sua soddisfazione donando a loro, generosamente e largamente, consigli preziosi e idee originali che nascevano spontanei dalla Sua mente penetrante.

E con quanta coscienza e profondità esaminava i lavori che Gli venivano presentati! I manoscritti erano sempre restituiti con preziose osservazioni e completamenti; qualche volta invitava ad un rifacimento di tutto il lavoro...

Diversi Suoi scolari hanno raggiunto la cattedra universitaria e vari altri sono già ben avviati per ottenerla.

Ecco alcune affermazioni di colleghi e scolari.

— « A Pisa, alla Normale e alla Sapienza echeggia il ricordo delle magnifiche lezioni di Analisi infinitesimale da Lui tenute agli studenti del biennio, di quelle di Analisi superiore per gli iscritti alla laurea, delle Sue conferenze al Seminario matematico della Normale. Delle questioni presentava i punti essenziali; le Sue deduzioni, che avevano insieme il requisito della semplicità e della naturalezza, e la Sua parola facile e precisa, lo facevano apparire ai Suoi scolari, come era effettivamente, un Maestro insuperabile. » (G. SANSONE.)

— « Non posso tacere l'attrazione potentissima che esercitarono su di noi studenti le lezioni di Analisi superiore del **TONELLI**, con le quali ci apriva le vie della moderna teoria delle funzioni di variabile reale: non solo il giovane Maestro ci presentava i concetti più delicati nella forma più limpida e chiara, tanto che noi rimanevamo sorpresi di non accorgerci delle difficoltà che sono proprie di questo ramo meraviglioso della Matematica, ma in noi sorgeva vivissimo il desiderio di raggiungere qualche modesto risultato. Quale più affascinante figura di Maestro è possibile immaginare?! » (S. CINQUINI.)

— « Solo chi ha avuto la fortuna di esser stato Suo allievo può conoscere la grandezza dello Scienziato attraverso la Sua opera di Insegnante: i concetti che esponeva con cristallina chiarezza unita a un profondo spirito di critica, si trasformavano in materia viva di studio e di ricerca nella mente di chi lo ascoltava. » (L. CESARI.)

— « Maestro nel senso più alto e nobile della parola, esercitava sugli allievi un particolare fascino, frutto della Sua robusta personalità. Le Sue lezioni erano seguite in religioso silenzio ed erano di una singolare efficacia e suggestione. I concetti più riposti e le teorie più complicate erano da Lui presentati con una spontaneità e una chiarezza tali che anche le menti dei giovani meno pronti riuscivano a seguirli e a impadronirsene. Fuori delle aule scolastiche continuava il Suo magistero fra i giovani che si dedicavano alla ricerca scientifica e nei quali sapeva infondere con delicata sensibilità paterna quell'entusiasmo e quella passione che in Lui erano abituali. Fu per loro oltre a tutto Maestro di vita. » (L. GIULIANO.)

— « Le Sue lezioni erano meravigliose; **Egli** portava l'uditorio ad affrontare nel modo più naturale i problemi più difficili e sapeva rendere tanto fedelmente il Suo pensiero — con un linguaggio semplice e conciso — che quanto **Egli** diceva si sarebbe potuto senz'altro stampare! Alcune delle Sue lezioni sono rimaste indimenticabili per chi ebbe la ventura di udirle; e ciò non solo per

quelle più elevate di Analisi superiore, ma anche per i corsi del primo biennio, durante i quali molti, come chi scrive, sentirono nel fascino della Sua parola il richiamo della Scienza e il bisogno di abbandonare altre vie, per cui già erano incamminati, per seguire il Maestro.» (S. FAEDO.)

1.4. - Lo Scienziato sommo.

Il **TONELLI** è un Matematico del tutto eccezionale, uno Scienziato di forte genialità, veramente un Grande! Era nato per la Matematica; e così **Egli** ebbe a esprimersi per essa nel 1943 (v. la Pubblicazione [163] nell'elenco al successivo n. 3):

«... la *Matematica* essendo tra tutte le scienze, oltre che la più pura e la più ideale, anche la più sinceramente artistica, perchè in essa il sentimento artistico « domina e guida il ricercatore per la scoperta di verità eterne e per comporre in « un tutto armonioso. »

Fin dai Suoi lavori giovanili si rivela la Sua non comune capacità d'indagine. Dotato di forte spirito critico, aveva come l'istinto del Vero in quanto il vero avvertiva prima di averlo dimostrato tale; penetrava rapidamente e profondamente le questioni anche le più ardue, e possedeva una grande potenza inventiva. I Suoi scritti hanno il sommo pregio di una esposizione piana, limpida e sicura, e sono tutti del più alto valore. **Egli** spaziò nell'Analisi in lungo, in largo e in profondità, tracciando nuove vie maestre e indicando nuove e sempre più alte mete. Il Suo campo principale di studi fu quello delle funzioni di variabili reali e soprattutto il Calcolo delle Variazioni su cui ci ha dato l'Opera profondamente originale e veramente grandiosa dal titolo *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* (in due poderosi volumi). Molto ancora ci aveva promesso di dare e ci avrebbe indubbiamente donato, se non ci veniva rapito da una crudele morte prematura.

Egli portò assai in alto la Matematica italiana e il Suo nome ebbe presto una rinomanza mondiale; divenne membro di numerose Accademie e associazioni matematiche italiane e straniere (*). Alcuni mesi prima della Sua scomparsa **Egli** era stato invitato da ALBERTO EINSTEIN ad andare negli Stati Uniti per studiare i problemi matematici connessi alle ricerche atomiche.

(*) Era membro della Pontificia Accademia delle Scienze, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Accademico Benedettino della Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, socio corrispondente della Accademia delle Scienze di Torino, socio corrispondente dell'Istituto lombardo di Scienze e Lettere, socio corrispondente dell'Accademia Nazionale dei Lincei, membro onorario della « Société Mathématique de Moscou », membro onorario della « Calcutta Mathematical Society », membro del Con-

Ecco alcune affermazioni di scolari, di colleghi e di Matematici stranieri.

— « **LEONIDA TONELLI**, matematico di altissimo valore, fu uno dei maggiori esponenti di quel rigoglioso sviluppo che ebbe nell'ultimo quarantennio la teoria delle funzioni di variabile reale. A Lui va in gran parte il merito di aver mantenuto l'Analisi matematica italiana a quell'alto livello a cui l'avevano portata le grandi figure di DINI, ARZELÀ e VOLTERRA. Egli aveva un gusto finissimo nel sentire e nel porre i problemi che via via si presentavano al Suo spirito di ricercatore; e quando affrontava una questione — per quanto complessa e difficile — la penetrava in profondità e, sceverando il superfluo dall'essenziale, riusciva a coglierne aspetti di armoniosa semplicità. » (S. FAEDO.)

— « Basterebbe il complesso degli altri contributi (cioè dei contributi non relativi al Calcolo delle Variazioni) per potere affermare che il **TONELLI** è stato un matematico di valore eccezionale. » (S. CINQUINI.)

— « I *Fondamenti* Gli dettero risonanza mondiale e hanno fatto di Lui uno dei maggiori matematici italiani degli ultimi secoli. » (G. SANSONE.)

— « Scienziato di grande genialità, portava nelle ricerche che sottoponeva all'indagine della Sua mente la forza del Suo ingegno versatile e straordinariamente ricco di fecondità inventiva: le più astruse questioni che per molti anni avevano invano affaticato le menti dei più insigni matematici venivano da Lui affrontate e risolte con una semplicità e una chiarezza di percezione che sorprende e sbalordisce. Dotato di uno spirito critico acutissimo, possedeva in sommo grado il dono di saper sviscerare i problemi più complicati, finchè si presentavano alla Sua mente nella forma più naturale per essere risolti. » (L. GIULIANO.)

— « ... For the simplest problems of the calculus of variations, **TONELLI's** method dominated by the point of view of the functional calculus, has led to an important re-orientation of the subject, and to the establishment of an imposing group of existence theorems. How fruitful it will prove to be in the study of more complicated problems, and whether it will enable us to study

siglio direttivo del Circolo Matematico di Palermo, membro del Comitato di redazione degli Annali di Matematica pura e applicata, membro della Commissione scientifica e tesoriere della Unione Matematica Italiana, membro del Comitato di redazione della « *Compositio Mathematica* » di Amsterdam, membro del Consiglio Nazionale delle Ricerche, membro del Consiglio direttivo del Comitato Nazionale di consulenza scientifico-tecnica per la Fisica e la Matematica, membro della « *American Mathematical Society* », Direttore della seconda serie degli Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa (Sezione Scienze Fisiche e Matematiche).

functionals of more general character than those included in the calculus of variations, are questions which I am not able to answer.» (A. DRESDEN, 1926.)

— « Le service rendu à la science par la découverte de la sémi-continuité, que l'on doit à M. **TONELLI**, est capital. » (J. HADAMARD, in una Comunicazione alla Acad. des Sciences de Paris.)

— « Nous croyons qu'on atteindra mieux le fond des choses et qu'on évitera des difficultés en abandonnant l'intermédiaire du paramètre et en traitant directement la ligne comme une variable absolument indépendant. ... C'est, d'ailleurs, le point de vue que vient d'adopter récemment M. **TONELLI** dans son intéressant ouvrage *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. » (M. FRÉCHET, « Les espaces abstraits », 1928, p. 4.)

— « C'est à M. **L. TONELLI** que l'on doit les plus beaux et les plus complets résultats concernant ces surfaces. » (S. SAKS, « Théorie de l'intégrale », 1933, p. 100.)

— « Ausserordentlich exakt und originell ist die Behandlung der ebenen Variationsrechnung bei **TONELLI**. » (C. CARATHÉODORY, « Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung », 1935, p. 398.)

— « ... Mais la généralité de la méthode n'apparut qu'après que l'on se fut aperçu que la réussite des procédés employés était due à la propriété de l'intégrale J de posséder la semi-continuité. Ce fut M. **TONELLI** qui, usant systématiquement de l'analyse fonctionnelle, mit à la base de l'étude directe des problèmes de maximum et minimum le concept de semi-continuité et est ainsi le véritable fondateur des méthodes nouvelles. » (V. VOLTERRA e J. PÉRÈS, « Théorie générale des fonctionnelles », t. I, 1936, p. 110.)

2. - Uno sguardo all'Opera matematica di Leonida Tonelli.

2.1. - Preambolo.

Il **TONELLI** è *le véritable fondateur des méthodes nouvelles* nel Calcolo delle Variazioni, come hanno affermato nel 1936 V. VOLTERRA e J. PÉRÈS nel loro trattato « Théorie générale des fonctionnelles ». Il **TONELLI**, dopo avere constatato che i funzionali del Calcolo delle Variazioni sono in generale discontinui, fece la grande scoperta che tali funzionali sono invece semicontinui.

Egli, basandosi su la *semicontinuità*, ci ha creato per questo Calcolo un nuovo potente e naturale metodo di ricerca — da Lui chiamato giustamente *metodo diretto* — che ha dato origine alla cosiddetta *Scuola Italiana di Calcolo delle Variazioni*. Seguendo questo Suo metodo **Egli** ha ottenuto un complesso sorprendente di risultati fondamentali. Inoltre, nello indirizzo di studi tracciato dal **TONELLI** si ebbe, e si ha tuttora, una vera collaborazione internazionale: i principali collaboratori, mentre viveva il **TONELLI**, furono il francese É. GOURSAT; gli italiani S. CINQUINI, B. MANIÀ, A. DEL CHIARO; l'austriaco H. HAHN; il tedesco W. DAMKÖHLER; gli ungheresi A. HAAR, T. RADÓ; gli americani L. M. GRAVES, E. J. MC SHANE, J. DOUGLAS, G. B. MORREY; i russi M. LAVRENTIEFF, N. BOGOLIOUBOFF; il giapponese M. NAGUMO.

Per potere sviluppare e perfezionare il Calcolo delle Variazioni nelle varie direzioni, che andavano via via presentandosi seguendo il Suo metodo diretto, il **TONELLI** fu indotto spontaneamente ad occuparsi di vari altri rami della Matematica, quali la derivazione e l'integrazione, la rettificazione delle curve e la quadratura delle superficie, le equazioni differenziali e le equazioni integrali, le serie trigonometriche, l'approssimazione delle funzioni, inoltre numerosi altri importanti argomenti. In ciascuno di questi rami **Egli** ha lasciato delle orme profondissime che da sole bastano ad immortalarlo.

2.2. — Calcolo delle Variazioni e Analisi funzionale.

Nell'elenco delle Pubblicazioni, al successivo n. 3, vedansi i lavori seguenti:

Memorie e Note [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [24], [25], [26], [27], [28], [29], [31], [32], [33], [34], [35], [36], [37], [40], [41], [46], [50], [51], [52], [53], [54], [55], [56], [58], [60], [64], [72], [81], [89], [91], [97], [101], [102], [110], [111], [113], [115], [117], [118], [119], [121], [122], [128], [130], [132], [133], [134], [135], [136], [137], [140], [142], [144], [145], [150], [152], [154], [158], [161], [162];

Trattati [166], [167].

Il Calcolo delle Variazioni, nato quasi contemporaneamente all'Analisi infinitesimale e ispirato dallo studio dei fenomeni naturali, fu il centro principale delle penetranti ricerche e meditazioni del **TONELLI** durante tutta la Sua vita di studioso. Tale orientamento di studi fu accarezzato dal **TONELLI** fin da studente — come **Egli** ebbe ad accennarmi in conversazione — per l'influenza che Gli destò l'insegnamento del Suo amato Maestro CESARE ARZELÀ. Mentre il **TONELLI** era studente universitario, fervevano gli studi intorno alla nuova disciplina data dalla « Analisi funzionale », che il VOLTERRA aveva costituita nelle sue fondamenta da poco più di un decennio (nel 1887) e alla quale il VOLTERRA fu condotto (nel 1884) da problemi di Fisica matematica apparte-

nenti al Calcolo delle Variazioni. A questa stessa Analisi funzionale apportava allora, in altra direzione, dei contributi importanti anche SALVATORE PINCHERLE. L'ARZELÀ, assertore della grande importanza dell'Analisi funzionale, nelle sue lezioni superiori, all'Università di Bologna, non mancò di soffermarsi sui concetti basilari, allora in formazione, di tale Analisi, insistendo su certe idee a lui care e che poi ebbero a rivelarsi veramente molto feconde, soprattutto cioè:

- 1°) Su l'opportunità di studiare i funzionali considerando le linee o le superficie o le funzioni, da cui dipendono, come delle variabili totalmente indipendenti, senza fare intervenire dei parametri ausiliari come faceva il VOLTERRA.
- 2°) Su il tentativo (che risale al 1897), però non riuscito, di risolvere per via diretta la questione, di Calcolo delle Variazioni, data dal ben noto problema di DIRICHLET.

La *teoria classica* del Calcolo delle Variazioni — creatasi principalmente nel periodo che dai fratelli BERNOULLI e da EULERO va fino a WEIERSTRASS, dovuta soprattutto al genio di G. L. LAGRANGIA — trasforma subito, come si sa, i problemi di massimo e minimo degli integrali che si considerano in altre questioni di notevole difficoltà date da problemi ai limiti o al contorno per certe equazioni differenziali (le cosiddette equazioni di EULER), inoltre tale teoria si rivolge particolarmente solo verso gli estremi relativi. Il **TONELLI** sentì decisamente e sostenne energicamente la necessità di abbandonare la teoria classica, cercando soprattutto di svincolare il Calcolo delle Variazioni dalla teoria delle equazioni differenziali e conseguentemente portando il Calcolo delle Variazioni a giovare invece alla teoria delle equazioni differenziali. Precisamente **Egli** sostenne che il Calcolo delle Variazioni doveva inquadarsi nell'Analisi funzionale e che i funzionali, dati dagli integrali da estremare, andavano considerati secondo il punto di vista dell'ARZELÀ, cioè le linee o le superficie o le funzioni da cui essi dipendono andavano trattati come delle variabili totalmente indipendenti; conseguentemente tali integrali da estremare dovevano studiarsi *direttamente*, in modo analogo a quanto si fa, nel Calcolo differenziale, per le ordinarie funzioni da estremare. Seguendo questa via seducente si presentò subito, però, un fatto molto grave e assai poco confortante: mentre le ordinarie funzioni da estremare sono tutte continue, *svariati integrali semplici e importanti del Calcolo delle Variazioni sono invece funzionali discontinui* (basta pensare, ad esempio, all'integrale che dà la lunghezza di una curva). Il **TONELLI**, analizzando minutamente tale questione, giunse alla conclusione notevole che *gli integrali del Calcolo delle Variazioni sono nella loro quasi totalità dei funzionali discontinui e un integrale*

$$I_C = \int_C F(x, y, x', y') ds$$

è continuo soltanto se la funzione integranda è lineare nel complesso delle deri-

vate x' e y' . Restò allora aperto il grave problema di trovare per i funzionali una proprietà più confacente, più larga della continuità. Il **TONELLI** con geniale riflessione e sensibilità superò lo scoglio. Egli fece la scoperta capitale che la *semicontinuità* è proprio la proprietà generale che accompagna i fatti variazionali, cioè proprio il concetto da assumere a base della desiderata nuova teoria del Calcolo delle Variazioni. Ciò segue dal seguente Suo teorema: *In un problema di Calcolo delle Variazioni, supposte soddisfatte certe condizioni di regolarità, l'integrale da estremare è un funzionale semicontinuo, inferiormente o superiormente, dell'elemento (linea o superficie o funzione) da cui dipende.* Se poi le dette condizioni di regolarità non sono soddisfatte e gli integrali che si considerano sono funzionali discontinui, il **TONELLI** ha mostrato ampiamente che la teoria basata sul concetto di semicontinuità si piega agevolmente, e in vari modi, anche alla ricerca dei massimi e minimi di tali integrali.

Con il concetto di semicontinuità il **TONELLI** riuscì a chiarire un punto fondamentale della «teoria classica» del Calcolo delle Variazioni. In tale teoria si considerano per l'estremo le quattro condizioni seguenti: la condizione di EULER, la condizione di JACOBI, la condizione di LEGENDRE, la condizione di WEIERSTRASS. Ora, la condizione di EULER esprime che sopra un ente estremante la variazione prima dell'integrale che si considera deve essere nulla; la condizione di JACOBI esprime che sopra un ente estremante la variazione seconda di tale integrale deve essere negativa o nulla nel caso del massimo e positiva o nulla nel caso del minimo; ma che cosa esprimono le altre due condizioni? Il **TONELLI** trovò appunto la seguente interpretazione funzionale semplicissima: *Le condizioni di LEGENDRE e di WEIERSTRASS equivalgono puramente e semplicemente alla semicontinuità sull'ente estremante del funzionale rappresentato dall'integrale che si vuole rendere massimo o minimo, intendendosi semicontinuità superiore nel caso del massimo e semicontinuità inferiore nel caso del minimo.*

Nel Calcolo delle Variazioni, trattato con il metodo diretto del **TONELLI**, assume una grandissima importanza, sia teorica che pratica, la determinazione di *condizioni per l'esistenza* dell'estremo libero. Il **TONELLI** si occupò largamente e profondamente di tali condizioni, fissando a questo scopo vari concetti fondamentali (quelli di *integrale regolare, integrale quasi regolare, integrale quasi regolare normale, ecc.*) e stabilendo risultati notevolissimi che abbracciano le proposizioni della teoria classica. Svariate estensioni di tali risultati sono state poi ottenute dalla Scuola del **TONELLI**, in modo da esaurire quasi completamente l'argomento. L'importanza pratica dei teoremi di esistenza sta nel fatto che essi portano a stabilire dei procedimenti di calcolo effettivo degli enti estremanti e quindi di calcolo di soluzioni delle equazioni funzionali alle quali soddisfano tali enti.

Il **TONELLI** ricercò le proprietà analitiche dell'ente estremante cioè le proprietà di differenziabilità e del soddisfare a certe equazioni, e in ciò si servì grandemente dei due concetti, da Lui introdotti, di *estremaloidi* e di *pseudo-estremaloidi*. I risultati qui ottenuti sono pure notevolissimi ed un'applicazione di elevato interesse è stata da Lui fatta con la risoluzione generalissima di un problema fondamentale su le orbite periodiche, interessante la Meccanica e l'Astronomia.

Sempre relativamente ai problemi dell'estremo libero, il **TONELLI** studiò ancora l'importante questione della *determinazione di condizioni per l'unicità* sia degli enti estremanti sia delle soluzioni delle equazioni funzionali alle quali conducono i problemi di Calcolo delle Variazioni.

Il **TONELLI** trattò ancora i *problemi isoperimetrici* relativi a integrali curvilinei, riuscendo a porre in evidenza, nello studio di tali problemi, la superiorità del Suo metodo diretto rispetto alla teoria classica. Egli, estendendo in guisa opportuna un certo procedimento detto « di arrotondamento », ricondusse un gruppo di problemi isoperimetrici relativi ad integrali doppi a facili problemi isoperimetrici relativi ad integrali semplici. In questo modo Egli trattò il problema di LORD RAYLEIGH della teoria del suono.

Per un tipo importante di problemi di LAGRANGIA e di MAYER, il **TONELLI** sviluppò una teoria generale parallela a quella per gli integrali semplici.

Il metodo diretto venne dal **TONELLI** applicato pure agli integrali doppi, precisando le condizioni per la loro semicontinuità, dando anche teoremi generali per l'esistenza dell'estremo, ed iniziando lo studio delle proprietà analitiche delle superficie estremanti. Ciò venne da Lui applicato a risolvere completamente i classici problemi di DIRICHLET e di PLATEAU.

Una classe speciale di difficili problemi di minimo, presentatisi in una questione di alta tecnica, formò l'oggetto delle ultime profonde ricerche del **TONELLI**.

Ed ora un'osservazione. L'Analisi infinitesimale e il Calcolo delle Variazioni hanno dato spontaneamente origine alla Analisi funzionale, e gli sviluppi sono avvenuti proprio nella guisa sostenuta dal **TONELLI**: il Calcolo delle Variazioni ha trovato la sua sede naturale nella Analisi funzionale, costituendo precisamente — in tale Analisi — il notevole capitolo dei massimi e dei minimi dei funzionali. Attualmente si comprende che una trattazione completa dei vari problemi del Calcolo delle Variazioni non potrà ottenersi che procedendo oltre nella strada maestra segnata dal grande **TONELLI**: occorrerà sempre più ispirarsi alla luce meridiana che proviene dalla Analisi funzionale, intesa nella sua maggiore generalità possibile. Come conseguenza, il nome « Calcolo delle Variazioni » in quanto adoprato a designare, e non sembra del tutto propriamente, una certa branca di studi, potrà un giorno anche sparire dall'uso; ma il nome **LEONIDA TONELLI** non sparirà certo: esso resterà e

grandeggerà sempre più fra i nomi dei pionieri dell'Analisi funzionale, giacchè il potente metodo diretto da Lui datoci, i fondamentali concetti da Lui stabiliti e i numerosi notevoli risultati da Lui ottenuti, nel campo dell'Analisi funzionale, continueranno ad essere di mezzo, di fondamento e di sprone verso immancabili nuove mete.

2.3. - Derivazione e integrazione.

Nell'elenco delle Pubblicazioni, al successivo n. 3, vedansi i lavori seguenti:

Memorie e Note [1], [8], [11], [30], [38], [40], [41], [42], [43], [45], [47], [48], [49], [57], [62], [63], [74], [83], [85], [86], [88], [94], [103], [107], [108], [109], [116], [148], [159], [160];

Trattati [166], [168].

Nella Sua prima pubblicazione (argomento di una Sua tesina orale alla laurea), del 1907, il **TONELLI** studia, con particolare finezza e profondità, le funzioni derivate, tenendo conto di risultati — allora recenti — dell'ARZELÀ e del VOLTERRA, e dà una condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione di una variabile sia l'integrale secondo MENGOLI e CAUCHY della sua derivata.

Egli semplificò notevolmente la dimostrazione del seguente importante teorema di G. GOLDSKY: « Una funzione (reale di una variabile reale) continua e derivabile, con derivata finita o no, in tutto un intervallo, risulta una costante in tale intervallo se la sua derivata è nulla quasi dappertutto nell'intervallo. »

Il **TONELLI** dedicò vari lavori alla *derivazione per serie*. Principalmente, nel 1916 generalizzò in modo notevole un teorema del FUBINI su la derivazione termine a termine, quasi dappertutto, delle serie convergenti di funzioni monotone; nel 1931 diede un importante teorema di derivazione per serie, contenente, come casi particolari, risultati di N. OBRECHKOFF e di A. COLUCCI.

Egli si occupò, in tempi successivi (1916, 1920, 1925, 1927), del problema della *ricerca delle funzioni primitive*, giungendo a conclusioni importanti che completano altre del LEBESGUE, del VITALI e del DENJOY. Anzitutto **Egli** dimostrò, in modo elementare e intuitivo, il teorema (di LEBESGUE e VITALI) che « una funzione assolutamente continua è sempre eguale all'integrale della sua derivata (considerata là dove esiste) ». Relativamente ad una funzione continua ma non assolutamente continua, per la quale al concetto di derivata va sostituito, come si sa, quello di numeri derivati, **Egli**, con molta genialità, riuscì a prendere in considerazione anche il caso in cui i numeri derivati non sono sempre finiti, caso che il DENJOY non aveva contemplato. Precisamente indicò « un procedimento che permette di determinare la funzione

continua, a meno di una costante additiva, in tutto l'intervallo considerato, quando si sappia che il numero derivato superiore destro (od un altro qualsiasi dei quattro numeri derivati estremi) è finito ovunque ad eccezione al più di un insieme numerabile di punti, ed esso sia conosciuto quasi dappertutto ».

Il **TONELLI** ha indicato un altro modo di introdurre *la integrazione secondo LEBESGUE*, modo assai semplice e notevole, del tutto indipendente dalla teoria della misura dei gruppi di punti e dal postulato di ZERMELO. Egli, appoggiandosi su il Suo notevole concetto di *funzione quasicontinua*, definisce l'integrale di LEBESGUE semplicemente mediante passaggi al limite di integrali di MENGOLI e CAUCHY di funzioni continue.

Altri Suoi risultati importanti sono relativi all'integrazione per parti, alla derivazione di un integrale rispetto a un parametro, alla derivata seconda mista di un integrale doppio, al teorema di GREEN, all'integrale di DIRICHLET, ecc..

2.4. - Rettificazione delle curve e quadratura delle superficie.

Nell'elenco delle Pubblicazioni, al successivo n. 3, vedansi i lavori seguenti:

Memorie e Note [5], [23], [39], [43], [75], [76], [77], [78], [79], [84], [84bis], [148], [159].

Varie questioni su la rettificabilità delle curve, lasciate insolute dal JORDAN, attirarono l'attenzione del **TONELLI** e vennero da Lui meravigliosamente risolte dopo solo un anno dal conseguimento della Laurea: ciò valse a crearGli subito una notevole fama. Poggiandosi sui concetti, allora recentissimi, di integrale del LEBESGUE e di assoluta continuità del VITALI, Egli giunse nel 1908 alle seguenti conclusioni (ora note con il nome di *teoremi di TONELLI*): 1°) Per una curva continua e rettificabile esiste sempre finito l'integrale classico (che nel caso di una curva elementare dà proprio la lunghezza) e la lunghezza della curva è sempre non minore di tale integrale classico. 2°) La condizione necessaria e sufficiente affinché, per una curva continua e rettificabile, la lunghezza sia data dall'integrale classico, è che le funzioni definenti la curva siano assolutamente continue.

Questioni analoghe alle precedenti per le curve vengono a porsi per le superficie; però qui le difficoltà sono estremamente maggiori. Nel 1926 il **TONELLI** diede un altro notevolissimo saggio della potenza del Suo forte e agile ingegno: attaccò e risolse tali questioni per le superficie date nella forma

$$(1) \quad z = f(x, y), \quad (x, y) \in Q,$$

dove $f(x, y)$ è una funzione univoca e continua nel campo Q (per semplicità

tale campo è il quadrato ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$). Si può ora affermare che queste conclusioni del **TONELLI** hanno aperto la via agli importantissimi studi su la teoria generale delle superficie intrapresa, di recente, da valorosi matematici italiani e stranieri. Il **TONELLI** scelse per il concetto di « area di una superficie » la molto naturale e generale definizione del **LEBESGUE**: « L'area di una superficie S è il minimo limite delle aree (elementari) delle poliedriche (inscritte e non inscritte in S) tendenti ad S . » Egli, inoltre, trovò necessario modificare i concetti, da altri stabiliti, di « funzione di due variabili a variazione limitata » e di « funzione di due variabili assolutamente continua », e i nuovi concetti da Lui posti hanno assunto una enorme importanza, oltre che nel problema della quadratura delle superficie, in altre notevoli questioni. Ecco le Sue principali conclusioni:

1°) Condizione necessaria e sufficiente affinché la superficie continua (1) sia quadrabile, cioè abbia area finita, è che la funzione $f(x, y)$ sia a variazione limitata nel quadrato Q .

2°) Se la superficie continua (1) è quadrabile, l'area della superficie è sempre non minore dell'integrale classico (che nel caso di una superficie elementare dà proprio l'area).

3°) Condizione necessaria e sufficiente affinché, per la superficie (1) continua e quadrabile, l'area sia data dall'integrale classico, è che la funzione $f(x, y)$ sia assolutamente continua nel quadrato Q .

2.5. - Equazioni differenziali ed equazioni integrali.

Nell'elenco delle Pubblicazioni, al successivo n. 3, vedansi i lavori seguenti: *Memorie e Note* [61], [73], [87], [89], [92], [93], [102], [121], [131], [132], [133], [151];

Trattato [179].

La teoria delle equazioni differenziali suscitò sempre nel **TONELLI** il più vivo interesse, e subito dopo la Sua laurea iniziò su di essa delle ricerche che dovette interrompere nel 1915, al sopraggiungere della guerra, senza avere potuto fare alcuna pubblicazione. Tralasciando di parlare del grande contributo da Lui dato a tale teoria con il Suo metodo diretto di Calcolo delle Variazioni, accennerò agli altri Suoi principali contributi su l'argomento. Nel 1925 Egli stabilì, per le equazioni differenziali del primo ordine e di forma normale, un notevole teorema di unicità che suscitò un vivo interesse ed ebbe un larghissimo seguito di completamenti ed estensioni da parte di valenti matematici italiani e stranieri. Nel 1926 precisò un fatto già in parte osservato nei Suoi « Fondamenti di Calcolo delle Variazioni », e cioè che il classico

teorema di STURM su le equazioni differenziali lineari, omogenee, del 2° ordine, si estende a una larga classe di equazioni differenziali *non* lineari, sempre omogenee e del 2° ordine. Nel 1936, insieme con il SANSONE, portò un essenziale completamento a un teorema di stabilità dell'ARMELLINI. Nel 1939 stabilì, per un'equazione differenziale del 2° ordine e in forma normale, interessantissime proposizioni generali relative all'esistenza di una soluzione che negli estremi di un dato intervallo assuma valori prestabiliti.

La *teoria delle equazioni integrali* fu pure argomento di studio del **TONELLI**. Egli ne fece oggetto dei Suoi corsi di Analisi superiore, ed è da dolersi che i Suoi appunti di lezione non siano stati pubblicati. In una importante Memoria del 1928 Egli fece uno studio completo e magistrale del problema di ABEL, traduentisi in un'equazione integrale di seconda specie. In altra Memoria trasportò genialmente alle equazioni integrali di VOLTERRA il metodo di CAUCHY per dimostrare l'esistenza di soluzioni di equazioni differenziali ordinarie. In un successivo notevole lavoro considerò una classe estesa di equazioni funzionali, contenente le equazioni differenziali ordinarie e le equazioni integrali di VOLTERRA (lineari o no), e ci diede un metodo originale di risoluzione, che ebbe nel seguito svariate applicazioni. E, ancora, ottenne importanti risultati su i nuclei delle equazioni integrali di FREDHOLM e particolarmente su i nuclei simmetrici.

2.6. - Serie trigonometriche.

Nell'elenco delle Pubblicazioni, al successivo n. 3, vedansi i lavori seguenti: *Memorie e Note* [45], [65], [66], [67], [71], [80], [82], [86], [88], [104], [105], [143], [146];

Trattati [168], [169].

Alle *serie trigonometriche* si trova rivolta una buona parte della attività scientifica del **TONELLI**, il quale (a seguito di un Suo Corso di lezioni, in litografia, del 1924-25) nel 1928 stampò una importante Opera dal titolo « Serie trigonometriche », meravigliosa esposizione sistematica e completa di quanto d'essenziale conoscevasi su tali serie fino all'anno 1928. L'uscita di simile Opera colmò allora una vera lacuna, in quanto dopo i libri, su lo stesso argomento, del DINI (del 1880) e del LEBESGUE (del 1906) nessuno si era preoccupato, o meglio si era sentito, di coordinare il vasto e delicato materiale che era venuto formandosi via via. In questa Opera è da notare la interessantissima introduzione storica, e il fatto che l'Autore, abbandonando l'ordine seguito dai precedenti trattatisti, incomincia con lo studio delle serie trigonometriche generali e passa poi a considerare le peculiari proprietà delle serie di FOURIER.

I contributi del **TONELLI** su le serie trigonometriche semplici si riferiscono principalmente alla convergenza assoluta, alla convergenza semplice, alla deri-

vazione per serie, alla interpolazione trigonometrica, alla chiusura del sistema di funzioni di FOURIER.

Sulle serie trigonometriche doppie il **TONELLI** diede (nel 1926) un fondamentale e assai generale teorema di convergenza, appoggiandosi su il Suo notevole concetto di funzione di due variabili a variazione limitata (introdotto per trattare il problema della quadratura delle superficie continue). Sono poi da annoverare altri criteri relativi alla convergenza uniforme di tali serie doppie, alla sommabilità per righe o per colonne, allo studio dei polinomi trigonometrici di FEJÉR in due variabili, ecc. ecc.. Di guisa che si può dire che l'ultimo capitolo della Sua Opera, sopra nominata, contiene quasi esclusivamente dei Suoi contributi.

2.7. - Approssimazione delle funzioni.

Nell'elenco delle Pubblicazioni, al successivo n. 3, vedansi i lavori seguenti: *Memorie e Note* [2], [3], [13], [39], [71], [79], [84].

Sul problema della *approssimazione delle funzioni* il **TONELLI** dimostrò una finissima sensibilità.

Nella Sua notevole Tesi di laurea, sostenuta nel 1907, viene fatto un ampio e profondo studio dei polinomi di approssimazione di TCHEBYCHEV. Data una funzione di una variabile, reale, univoca e continua nel suo intervallo di definizione, esiste sempre per questa funzione uno e un solo polinomio di approssimazione di TCHEBYCHEV, di grado n ; invece il **TONELLI** scoperse il fatto non previsto che per una analoga funzione di due variabili il polinomio di approssimazione di TCHEBYCHEV in generale non è più unico; inoltre stabili che la corrispondenza tra funzione e polinomio di approssimazione è continua. Ciò venne da Lui esteso anche alla rappresentazione delle funzioni reali continue mediante polinomi trigonometrici. Applicò ancora il metodo d'approssimazione di TCHEBYCHEV alle funzioni di una variabile complessa giungendo, fra l'altro, al risultato seguente: « Fra tutti i polinomi di dato grado, ve n'è sempre uno ed uno solo che dà della funzione considerata la massima approssimazione; e, di conseguenza, fra tutte le serie di polinomi (di gradi successivamente crescenti) uniformemente convergenti verso la funzione detta ve n'è sempre una ed una sola che dà la massima convergenza. » Questi risultati vennero riportati nel 1910 da P. MONTEL nelle sue « *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe* ».

In una Memoria del 1910 il **TONELLI** si occupò della rappresentazione delle funzioni, anche soltanto integrabili, mediante polinomi di STIELTJES giungendo a una notevole conclusione, riportata come « *teorema di TONELLI* » nel 1912 da CH. J. DE LA VALLÉE nel suo « *Cours d'Analyse infinitésimale* ».

Su tali polinomi Egli ritornò successivamente più volte, mostrandone numerose e importanti proprietà e facendone applicazioni varie (al problema della quadratura delle superficie, al Calcolo delle Variazioni, ecc.).

2.8. - Alcuni concetti fondamentali dell'Analisi e argomenti vari.

Nell'elenco delle Pubblicazioni, al successivo n. 3, vedansi i lavori seguenti:

Memorie e Note [4], [6], [7], [9], [10], [12], [14], [15], [28], [44], [59], [90], [95], [96], [100], [112], [114], [127], [129], [138], [139], [141], [149], [153], [159], [163];

Trattati [164], [165], [170], [171], [172], [173], [174], [175], [176], [177], [178].

Prescindendo da quei *concetti fondamentali dell'Analisi*, introdotti dal **TONELLI**, di stretta pertinenza del Calcolo delle Variazioni, e dal notevole concetto di *funzione quasicontinua*, è necessario soffermarsi su due concetti, posti dal nostro Grande, già accennati in precedenza e che vanno acquistando sempre maggiore importanza nell'Analisi.

1°) Concetto di *funzione $f(x, y)$, di due variabili, a variazione limitata in un campo Q* (per semplicità Q sia il quadrato ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$)). Esso si può definire geometricamente così: Si consideri la superficie S rappresentatrice di detta funzione, e poi la superficie piana S_x proiezione di S , parallelamente all'asse delle x , sul piano (y, z) , e l'analoga superficie piana S_y proiezione di S , parallelamente all'asse delle y , sul piano (x, z) (va notato che queste superficie piane potranno avere anche delle parti sovrappoventisi due o più volte). Se entrambe queste superficie S_x e S_y hanno aree finite si dice che «la $f(x, y)$ è a variazione limitata in Q ». La definizione analitica segue immediatamente e naturalmente. Questo concetto risulta indipendente dalle direzioni degli assi x e y per le funzioni *continue*, ma non per le *discontinue*; un concetto analogo completamente indipendente dalle direzioni degli assi x e y è quello di *funzione di due variabili generalmente a variazione limitata*: tale denominazione è del **TONELLI** e la precisazione del concetto stesso è del **CESARI**.

2°) Concetto di *funzione $f(x, y)$, di due variabili, assolutamente continua in un campo Q* . Esso si definisce imponendo che la funzione sia continua e a variazione limitata, inoltre, su quasi tutte le parallele all'asse delle x risulti assolutamente continua come funzione della sola x , e su quasi tutte le parallele all'asse delle y risulti assolutamente continua come funzione della sola y .

Il **TONELLI** fece importanti osservazioni e precisazioni su varie proposizioni fondamentali dell'Analisi, quali: il teorema di ASCOLI e ARZELÀ (relativo alla esistenza di una funzione di accumulazione in una varietà di funzioni egualmente continue e egualmente limitate); il teorema di EGOROFF (rife-

- [26] *Sul caso regolare nel Calcolo delle Variazioni.* Rend. Circ. Mat. Palermo 35, 49-73 (1913).
- [27] *Sui problemi isoperimetrici.* Rend. Circ. Mat. Palermo 36, 333-344 (1913).
- [28] *Sul valore di un certo ragionamento.* Atti Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. 49, 4-14 (1913).
- [29] *Sulle funzioni di linee.* Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (5) 23 (1° semestre), 28-33 (1914).
- [30] *Su una proposizione dell'ALMANSI.* Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (5) 23 (1° semestre), 676-682 (1914).
- [31] *Sulla stabilità dell'equilibrio di una certa massa liquida sottomessa alle sole forze molecolari.* Ann. Mat. Pura Appl. (3) 23, 61-106 (1914).
- [32] *Sur une méthode directe du Calcul des Variations.* (Note I.) C. R. Acad. Sci. Paris 158, 1776-1778 (1914).
- [33] *Sur une méthode directe du Calcul des Variations.* (Note II.) C. R. Acad. Sci. Paris 158, 1983-1985 (1914).
- [34] *Sul problema degli isoperimetri.* (Nota 2ª.) Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (5) 23 (2° semestre), 572-577 (1914).
- [35] *Sulle proprietà di minimo della sfera.* Rend. Circ. Mat. Palermo 39, 109-138 (1915).
- [36] *Sulle soluzioni periodiche nel Calcolo delle Variazioni.* Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (5) 24 (2° semestre), 317-324 (1915).
- [37] *Sur une méthode directe du Calcul des Variations.* Rend. Circ. Mat. Palermo 39, 233-264 (1915).
- [38] *Sulla derivata seconda mista di un integrale doppio.* (Lettera di LEONIDA TONELLI a GUIDO FUBINI). Rend. Circ. Mat. Palermo 40, 295-297 (1915).
- [39] *Sopra alcuni polinomi approssimativi.* Ann. Mat. Pura Appl. (3) 25, 275-316 (1916).
- [40] *Successioni di curve e derivazione per serie.* (Nota 1ª.) Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (5) 25 (1° semestre), 22-30 (1916).
- [41] *Successioni di curve e derivazione per serie.* (Nota 2ª.) Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (5) 25 (1° semestre), 85-91 (1916).
- [42] *Sulla ricerca delle funzioni primitive.* Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (5) 25 (1° semestre), 163-170 (1916).
- [43] *Sul differenziale dell'arco di curva.* Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (5) 25 (1° semestre), 207-213 (1916).
- [44] *Sulla potenza di alcuni insiemi.* Giorn. Mat. Battaglini 57, 219-236 (1919).
- [45] *A proposito di una Nota del sig. A. VERGERIO.* Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (5) 28 (1° semestre), 117-119 (1919).

- [46] *Il Calcolo delle Variazioni*. Annuario Scientifico ed Industriale 56 (parte I), 220-248 (1919).
- [47] *Sulla ricerca delle funzioni primitive*. (Nota 1^a.) Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (5) 29 (1^o semestre), 44-48 (1920).
- [48] ~~*Sulla ricerca delle funzioni primitive*. (Nota 2^a.) Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (5) 29 (1^o semestre), 106-110 (1920).~~
- [49] *Sulla ricerca delle funzioni primitive*. (Nota 3^a.) Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (5) 29 (1^o semestre), 186-191 (1920).
- [50] *Su alcuni punti di Calcolo delle Variazioni*. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (5) 29 (1^o semestre), 305-309 (1920).
- [51] *La semicontinuità nel Calcolo delle Variazioni*. Rend. Circ. Mat. Palermo 44, 167-249 (1920).
- [52] *Su due proposizioni di J. W. LINDBERG e E. E. LEVI, nel Calcolo delle Variazioni*. (Nota 1^a.) Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (5) 30 (1^o semestre), 19-22 (1921).
- [53] *Su due proposizioni di J. W. LINDBERG e E. E. LEVI, nel Calcolo delle Variazioni*. (Nota 2^a.) Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (5) 30 (1^o semestre), 110-112 (1921).
- [54] *Criteri per l'esistenza della soluzione in problemi di Calcolo delle Variazioni*. Ann. Mat. Pura Appl. (3) 30, 159-221 (1921).
- [55] *Sulla costante isoperimetrica*. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (5) 32 (1^o semestre), 587-590 (1923).
- [56] *Sul problema isoperimetrico con un punto terminale mobile*. Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna (7) 10, 83-87 (1923).
- [57] *Sulla nozione di integrale*. Ann. Mat. Pura Appl. (4) 1, 105-145 (1924).
- [58] *Sulle orbite periodiche irreversibili*. Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna (8) 1, 21-25 (1924).
- [59] *Su una proposizione fondamentale dell'Analisi*. Boll. Un. Mat. Ital. (1) 3, 103-104 (1924).
- [60] *Sur le Calcul des Variations*. Mat. Tidsskr. B., pp. 49-58 (1924).
- [61] *Sull'unicità della soluzione di un'equazione differenziale ordinaria*. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) 1, 272-277 (1925).
- [62] *Sul problema delle funzioni primitive*. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) 1, 349-353 (1925).
- [63] *Sul teorema di Green*. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) 1, 482-488 (1925).
- [64] *The Calculus of Variations*. Bull. Amer. Math. Soc. 31, 163-172 (1925).

- [101] *Sulla semicontinuità degli integrali doppi.* Atti Congresso Internaz. Mat. a Bologna nel 1928, 3, 65-67 (1930).
- [102] *Sur un problème de Lord RAYLEIGH.* Monatsh. Math. Phys. 37, 253-280 (1930).
- [103] *Su l'integrale di DIRICHLET.* Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna (8) 7, 3-10 (1930).
- [104] *Un'osservazione sulle serie.* Boll. Un. Mat. Ital. (1) 9, 57-59 (1930).
- [105] *Serie trigonometriche.* (Conferenza al Seminario Matematico della Facoltà di Scienze della Università di Roma.) Rend. Sem. Mat. Roma (2) 6, 26-42 (1930).
- [106] *Recensione dell'Opera: T. BONNESEN, Les problèmes des isopérimètres et des isépi-phanes.* (Gauthier-Villars, Paris 1929, pp. 175.) - Period. Mat. (4) 10, 177-178 (1930).
- [107] *Un teorema sulla derivazione delle serie.* Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) 13, 163-168 (1931).
- [108] *Sulle derivate esatte.* Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna (8) 8, 13-15 (1931).
- [109] *Calcolo differenziale.* Enciclopedia Italiana 12, 792-796 (1931).
- [110] *Sull'esistenza del minimo in problemi di Calcolo delle Variazioni.* Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) 1, 89-99 (1932).
- [111] *Un teorema di Calcolo delle Variazioni.* Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) 15, 417-423 (1932).
- [112] *Funzione.* Enciclopedia Italiana 16, 185-193 (1932).
- [113] *Sul Calcolo delle Variazioni.* Ver. Internat. Mathematiker-Kongresses Zürich 1932, 2, 102-103 (1932).
- [114] *FOURIER.* Enciclopedia Italiana 15, 823-824 (1933).
- [115] *L'estremo assoluto degli integrali doppi.* Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) 2, 89-130 (1933).
- [116] *Calcolo integrale.* Enciclopedia Italiana 19, 364-367 (1933).
- [117] *Sulle proprietà delle estremanti.* Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) 3, 213-237 (1934).
- [118] *Su gli integrali del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria.* Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) 3, 401-450 (1934).
- [119] *Su una particolare questione di Calcolo delle Variazioni.* Boll. Un. Mat. Ital. (1) 13, 205-209 (1934).
- [120] *Recensione dell'Opera: F. ENRIQUES e O. CHISINI, Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche.* Vol. IV: *Funzioni ellittiche e abeliane.* (Zanichelli, Bologna 1934, pp. VIII+274.) - Period. Mat. (4) 14, 323-325 (1934).
- [121] *Sulle equazioni di EULERO nel Calcolo delle Variazioni.* Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) 4, 191-216 (1935).

- [122] *Sulle estremaloidi del Calcolo delle Variazioni*. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) 21, 289-293 (1935).
- [123] *Recensione dell'Opera*: E. LANDAU, *Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung*. (P. Noordhoff, Groningen 1934, pp. 368.) - Period. Mat. (4) 15, 67-68 (1935).
- [124] *Recensione dell'Opera*: A. ZYGMUND, *Trigonometrical series*. (Monografie Matematyczne. Warszawa-Lwów 1935, pp. 322.) - Period. Mat. (4) 15, 193-194 (1935).
- [125] *Recensione dell'Opera*: L. GALVANI, *Introduzione matematica allo studio del metodo statistico*. (« Trattato elementare di Statistica » diretto da C. GINI; Vol. I, parte II. A. Giuffrè, Milano 1934, pp. 223.) - Period. Mat. (4) 15, 255-257 (1935).
- [126] *Recensione dell'Opera*: G. VITALI e G. SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*. Parte II: G. SANSONE, *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali*. (Monografie di Matematica appl. per cura del Consiglio Naz. Ricerche. Zanichelli, Bologna 1935, pp. vi+310.) - Period. Mat. (4) 16, 121-123 (1936).
- [127] *Su una proposizione fondamentale dell'Analisi Matematica*. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) 23, 161-165 (1936).
- [128] *Sulle estremali complete*. Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) 5, 159-168 (1936).
- [129] *Sulle funzioni di due variabili generalmente a variazione limitata*. Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) 5, 315-320 (1936).
- [130] *Su gli integrali continui del Calcolo delle Variazioni*. « Scritti matematici offerti a L. BERZOLARI », Rossetti, Pavia 1936, pp. 283-289.
- [131] *Estratto di lettera del Prof. LEONIDA TONELLI al Prof. GIOVANNI SANSONE*. « Scritti matematici offerti a L. BERZOLARI », Rossetti, Pavia 1936, pp. 404-405.
- [132] *Sulle equazioni delle estremanti nei problemi di MAYER*. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) 24, 180-187 (1936).
- [133] *Sulle equazioni delle estremanti nei problemi di LAGRANGE*. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) 24, 239-245 (1936).
- [134] *Sul problema di PLATEAU*. (Nota 1^a.) Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) 24, 333-339 (1936).
- [135] *Sul problema di PLATEAU*. (Nota 2^a.) Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) 24, 393-398 (1936).
- [136] *Su la semicontinuità nei problemi di MAYER e di LAGRANGE*. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) 24, 399-404 (1936).
- [137] *Méthode directe pour l'étude du maximum ou du minimum d'une intégrale simple*. Articolo alle pp. 111-128 dell'Opera: V. VOLTERRA et J. PÉRÈS, *Théorie générale des fonctionnelles*, T. I (*Généralités sur les fonctionnelles. Théorie des équations intégrales.*), Gauthier-Villars, Paris 1936, pp. XII+359.

- [138] SALVATORE PINCHERLE. Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) 6, 1-10 (1937).
- [139] ANDREA RAZMADZÉ. Trav. Inst. Math. Tbilissi 1, 11-16 (1937).
- [140] *Sul problema della superficie limitata da un dato contorno ed avente la minima area.* Atti Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. 72 (tomo I), 225-233 (1937).
- [141] *Sopra alcuni criteri di uguale continuità.* Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. 70 [oppure (3) 1], 107-116 (1937).
- [142] *Calcolo delle Variazioni.* Enciclopedia Italiana 34, 1001-1005 (1937).
- [143] *Sulle serie doppie di FOURIER.* Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) 6, 315-326 (1937).
- [144] *Il Calcolo delle Variazioni secondo la Scuola Italiana ed i suoi più recenti risultati.* Atti 1° Congresso Un. Mat. Ital. nel 1937 a Firenze, Zanichelli, Bologna 1938, pp. 26-39.
- [145] *Un teorema di semicontinuità per i problemi di MAYER.* Atti 1° Congresso Un. Mat. Ital. nel 1937 a Firenze, Zanichelli, Bologna 1938, pp. 127-132.
- [146] *Su un teorema relativo alle serie di FOURIER.* Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) 7, 329-331 (1938).
- [147] *Recensione dell'Opera: V. VOLTERRA et J. PÉRÈS, Théorie générale des fonctionnelles. T. I: Généralités sur les fonctionnelles. Théorie des équations intégrales.* (Gauthier-Villars, Paris 1936, pp. XII+359.) - Period. Mat. (4) 18, 120-128 (1938).
- [148] *Integrale, lunghezza, area.* Rend. Sem. Mat. Fis. Milano 13, 1-14 (1939).
- [149] *Sulla legge dei grandi numeri.* Saggi Scienze Assicuratrici Univ. Pisa 3, 1-11 (1939).
- [150] *Su alcuni funzionali.* Ann. Mat. Pura e Appl. (4) 18, 1-21 (1939).
- [151] *Sull'equazione differenziale $y'' = f(x, y, y')$.* Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) 8, 75-88 (1939).
- [152] *Su l'esistenza delle estremanti assolute per gli integrali doppi.* Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) 8, 161-165 (1939).
- [153] *Sulle funzioni d'intervallo.* Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) 8, 309-321 (1939).
- [154] *L'Analisi funzionale nel Calcolo delle Variazioni.* Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) 9, 289-302 (1940).
- [155] *Recensione dell'Opera: M. PICONE, Appunti di Analisi superiore.* (Rondinella, Napoli 1940, pp. VII+847.) - Boll. Un. Mat. Ital. (2) 3, 402-405 (1941).
- [156] *Recensione dell'Opera: D. HILBERT und P. BERNAYS, Grundlagen der Mathematik, Bd. 2.* (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. L, Springer, Berlin 1939, pp. XII+498.) - Scientia 69, p. 86 (1941).

- [157] *Recensione dell'Opera*: O. PERRON, *Irrationalzahlen*. Scientia 69, p. 87 (1941).
- [158] *Su un nuovo tipo di problemi di Calcolo delle Variazioni*. Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) 10, 167-189 (1941).
- [159] *Su alcuni concetti dell'Analisi moderna*. Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) 11, 107-118 (1942).
-
- [160] *Sull'integrazione delle funzioni*. Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) 11, 235-240 (1942).
- [161] *Nuove ricerche su una speciale classe di problemi di Calcolo delle Variazioni*. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) 1, 247-250 (1946).
- [162] *Nuove ricerche su una speciale classe di problemi di Calcolo delle Variazioni*. (Memoria postuma.) Riv. Mat. Univ. Parma 1, 125-156 (1950).
- [163] *Contributo dello Studio pisano al progresso delle Scienze matematiche*. Relazione inedita preparata per il 6° centenario della Università di Pisa nell'autunno del 1943.

3.2. - Trattati.

(in ordine cronologico di pubblicazione).

- [164] *Lezioni di Analisi algebrica*. (Litografia). Cagliari 1913.
- [165] *Lezioni di Analisi infinitesimale*. (Litografia.) Parma 1914.
- [166] *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. Vol. I. Zanichelli, Bologna 1921, pp. VII+466.
- [167] *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. Vol. II. Zanichelli, Bologna 1923, pp. VIII+660.
- [168] *Corso di Analisi superiore: Integrale di LEBESGUE e Serie trigonometriche*. Lezioni dettate nella Università di Bologna, raccolte da G. LAMPARIELLO. (Litografia.) Bologna 1924-25, pp. 359.
- [169] *Serie trigonometriche*. Zanichelli, Bologna 1928, pp. VIII+527.
- [170] *Lezioni di Analisi matematica*. Vol. I. (Litografia.) Tacchi, Pisa 1939 (in 5ª ediz. riveduta nel 1946), pp. 355.
- [171] *Lezioni di Analisi matematica*. Vol. II. (Litografia.) Tacchi, Pisa 1940 (in 4ª ediz. riveduta nel 1947), pp. 407.
- [172] (In collaborazione con E. LINDNER.) *Corso di Matematica per la Scuola media*. Vol. I. Sansoni, Firenze 1941 (in 2ª ediz. nel 1946), pp. VIII+294.
- [173] (In collaborazione con E. LINDNER.) *Corso di Matematica per la Scuola media*. Vol. II, Sansoni, Firenze 1941, pp. 210.

- [174] (In collaborazione con E. LINDNER.) *Corso di Matematica per la Scuola media*. Vol. III, Sansoni, Firenze 1942, pp. 334.
- [175] *Esercizi di Analisi matematica*. Vol. I. (Litografia.) Roma 1942 (in 4^a ediz. riveduta nel 1947), pp. 228.
-
- [176] *Esercizi di Analisi matematica*. Vol. II. (Litografia.) Roma 1942 (in 4^a ediz. riveduta nel 1947), pp. 241.
- [177] (In collaborazione con E. LINDNER.) *Aritmetica e Algebra*. Vol. I (per il Ginnasio superiore e le altre Scuole medie superiori). Sansoni, Firenze 1946. pp. iv+378.
- [178] (In collaborazione con E. LINDNER.) *Aritmetica e Algebra*. Vol. II (per i Licei e le altre Scuole medie superiori). Sansoni, Firenze 1947, pp. iv+482.
- [179] *Equazioni integrali lineari*. Manoscritto inedito.