LUIGI FANTAPPIÈ (*)

L'analisi funzionale nel campo complesso e i nuovi metodi d'integrazione delle equazioni a derivate parziali. (**)

Comunicazione al Convegno matematico di Parma, del 4-VI-1949.

Dobbiamo anzitutto felicitarci per il tema che è stato scelto per questo Convegno, poichè l'*Analisi funzionale*, con la *Geometria algebrica* e con il *Calcolo assoluto*, è fra le grandi teorie matematiche che hanno avuto in Italia la loro origine o importantissimi sviluppi. È infatti coi lavori del PINCHERLE e sopratutto del VOLTERRA, verso l'ultimo scorcio del secolo passato, che nasce questa nuova branca dell'Analisi, ed è degno di nota il fatto che il concetto stesso di *funzionale* (o « funzione di linea », come si diceva allora), abbia origine dalle ricerche del VOLTERRA nel campo della Fisica matematica, e proprio considerando la soluzione di un'equazione a derivate parziali come dipendente da tutti i valori al contorno, o dai valori ai limiti, e cioè come dipendente da *funzioni arbitrarie*. Si può dunque dire che fin dal suo inizio l'Analisi funzionale è stata sempre collegata con la *teoria delle equazioni differenziali a derivate parziali*, da cui ha preso le mosse e a cui deve anche servire, se non vogliamo che resti un germoglio sterile, fine a se stesso; è pertanto molto opportuno che anche tale teoria sia stata presa a tema di questo Congresso, insieme all'Analisi funzionale.

Dato però che, per la brevità del tempo a disposizione, un solo indirizzo dell'Analisi funzionale è stato sviluppato dai relatori, ritengo mio dovere aggiungere poche parole per completare, almeno in qualche lato, il quadro amplissimo della materia, racchiusa nel tema del Congresso. Prescindendo dagli indirizzi di altri eminenti cultori del Calcolo funzionale, tuttora viventi (GIORGI, GRAFFI, SBRANA, MINETTI, MAMBRIANI, ecc.), mi limiterò anzitutto a ricordare l'opera di un grande Assente, di LEONIDA TONELLI e della Sua Scuola, che, coi suoi « Metodi diretti », ha appunto riportato il classico « Calcolo delle Variazioni » entro il campo dell'Analisi funzionale, costituendolo

(*) Professore dello « Istituto Nazionale di Alta Matematica », Università di Roma. Indirizzo: Via Marco Aurelio, 42 - Roma (Italia).

(**) Lavoro ricevuto il 4-VI-1949.

in un capitolo importantissimo di questa, riguardante i problemi di massimo e minimo dei funzionali.

Inoltre mi permetto di far presente che anch'io, da circa venticinque anni, ho iniziato e sviluppato un altro indirizzo dell'Analisi funzionale, trasportando nel campo complesso i concetti introdotti dal VOLTERRA nel campo reale. E mentre a prima vista può sembrare che la considerazione delle sole funzioni analitiche (localmente) come argomenti dei funzionali venga a costituire una limitazione alla generalità delle considerazioni svolte, è facile persuadersi della verità del contrario. Basta infatti riflettere che restringendo successivamente, almeno fino a un certo punto, il campo di variabilità delle funzioni argomento, si vengono a considerare classi di funzionali *sempre più generali*. D'altra parte è da osservare che il campo delle funzioni analitiche è ancora abbastanza generale per tutti i bisogni delle applicazioni a problemi concreti. È quindi comprensibile che nel campo analitico si vengano a inquadrare senza difficoltà e senza eccezioni di alcuna specie funzionali in realtà molto più generali di quelli studiati precedentemente in campi troppo ampi, e in particolare anche funzionali, come ad es. la derivata in un punto, che sfuggivano ai metodi generali del VOLTERRA, del FRÉCHET, dell'HILBERT. Nel campo complesso infatti, a differenza di quanto avveniva nel campo reale, non solo tutti i funzionali *analitici* (caratterizzati dal fatto di conservare l'analiticità rispetto ai parametri) hanno *sempre* una derivata funzionale, ma hanno anche una variazione, e anzi variazioni di tutti i successivi ordini, che sono sempre *rappresentabili con integrali*, mediante le loro derivate funzionali, e sono quindi *sempre regolari* nel senso del VOLTERRA, senza più alcuna eccezione. La teoria dei funzionali analitici è quindi, così, armonica e chiusa in sè come la classica teoria delle funzioni analitiche, con la quale presenta del resto molte interessanti analogie.

Una sua prima applicazione riguarda poi la sistemazione rigorosa del calcolo delle funzioni di uno o più operatori funzionali (e non solo del simbolo di derivazione, come nei metodi puramente euristici di HEAVISIDE), poichè il problema, fondamentale nel «calcolo simbolico», della «valutazione» di un tale operatore è immediatamente risolto da una formula generale (quella che esprime ogni funzionale lineare) in base alla considerazione semplicissima che l'espressione in questione è un *funzionale lineare analitico* della funzione (sempre analitica) dell'operatore, pure potendo essere *non analitici*, e anche applicabili a funzioni *non analitiche*, gli operatori in questione.

La teoria dei funzionali analitici è stata applicata anche, da studiosi italiani e stranieri, alle più svariate questioni, dagli «invarianti di prolungamento» delle funzioni analitiche (CALUGAREANU), al calcolo delle funzioni di una matrice (FANTAPPIÈ, SCHWERDTFEGER, CIPOLLA, AMANTE, ecc.), alle funzioni di quaternioni (HÄFELI), al confronto con la trasformazione di LAPLACE (BATSCHELET).

Per quanto riguarda poi le applicazioni della teoria dei funzionali analitici alle equazioni a derivate parziali, è da porre in particolare rilievo il fatto che le due caratteristiche essenziali dei funzionali analitici, e cioè:

a) di essere definiti per funzioni analitiche localmente,

b) di conservare l'analiticità rispetto ai parametri,

si attagliano particolarmente bene al problema.

Se consideriamo infatti la soluzione di un'equazione alle derivate parziali come un funzionale dei valori iniziali e *del primo membro dell'equazione* (in quanto funzione di tutti i suoi argomenti), l'unico teorema *generale* di esistenza e unicità è quello di Cauchy-Kowalewski, che vale *solo* per funzioni analitiche localmente; solo per queste dunque il detto funzionale è definito con certezza, e in modo unico. E il teorema di Poincaré, d'altra parte, sulla dipendenza analitica della soluzione dai parametri che entrano analiticamente nell'equazione e nei valori iniziali, non dice altro che *tale funzionale è analitico*, nel senso appunto da noi precisato.

Non deve quindi sorprendere se con la teoria dei funzionali analitici si son potuti elaborare ben *cinque* nuovi metodi generali di integrazione *in forma finita* delle equazioni a derivate parziali, e cioè:

1° metodo o « metodo generale » di integrazione di tutte le equazioni a derivate parziali lineari e a coefficienti costanti *in un numero qualunque di variabili*, e *d'ordine comunque elevato* (mediante più operatori integrali e integro-differenziali).

2° metodo o metodo degli « operatori caratteristici » (integrazioni lungo le rette caratteristiche) valido a integrare tutte le equazioni e sistemi a derivate parziali in due variabili, d'ordine comunque elevato, che mostra la particolare struttura della soluzione come formata da più « onde » sovrapposte.

3° metodo o « metodo della soluzione fondamentale » che permette di risolvere lo stesso problema generale del primo, fornendo però sempre la cosiddetta « soluzione fondamentale »; il metodo di Volterra per le onde cilindriche vi rientra come caso particolare; altri casi di equazioni di 3° e 4° ordine sono stati risolti da Casulleras e Teixidor.

4° metodo o metodo degli « operatori interni » (funzioni dell'operatore I d'integrazione), che permette di integrare equazioni lineari a coefficienti *anche variabili* in casi non trattabili con la trasformazione di Laplace (equazione parabolica a coefficienti variabili).

5° metodo o metodo degli « operatori non permutabili », applicabile anche, come pure gli altri metodi, a problemi diversi da quello di Cauchy.

È da osservare infine che le formule così fornite dalla teoria dei funzionali analitici per la soluzione del problema di Cauchy per le equazioni a derivate parziali dànno ancora la soluzione, anche nel caso di funzioni iniziali *non analitiche*, purchè il problema fisico abbia senso (caso iperbolico), fatto riconoscibile dalla circostanza che, in questa ipotesi, tutte le varietà d'integrazione possono distendersi con continuità sul campo reale, senza sorpassare singolarità delle funzioni integrande.

Molti altri lavori sui funzionali analitici sono stati pubblicati, specialmente negli ultimi anni, da vari studiosi (o da miei discepoli), tra i quali ricorderò soltanto i già citati CALUGAREANU, SCHWERDTFEGER, CIPOLLA, AMANTE, HÄFELI, BATSCHELET e inoltre VOLTERRA, AUGÉ, SANVISENZ, LINÈS (questi ultimi tre, ora professori all'Università di Barcellona), BERNSTEIN, SILVA (professore all'Università di Lisbona), TEICHMÜLLER, TAYLOR, CINQUINI, CARAFA, PELLEGRINO, ecc.. Per una bibliografia più completa sui funzionali analitici rimando al lavoro di F. PELLEGRINO: *Die analytischen Funktionale und ihre Anwendungen*, in corso di stampa nel «Mathematisk Tiddskrift» di Copenhagen e anche al prossimo *Traité des fonctionnelles analytiques* in preparazione presso la casa «du Griffon» di Neuchâtel. Qui di seguito riporto i dati bibliografici relativi ai miei lavori principali:

1. – *Le calcul des matrices.* C. R. Acad. Sci. Paris **186**, 619-621 (1928).
2. – *La giustificazione del calcolo simbolico e le sue applicazioni all'integrazione delle equazioni a derivate parziali.* Mem. R. Accad. Italia. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **1**. n. 2, 1-35 (1930).
3. – *I massimi e minimi dei funzionali analitici reali.* Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) **12**, 296-301 (1930).
4. – *I funzionali analitici.* Atti Accad. Naz. Lincei, Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) **3**, 453-683 (1930).
5. – *Theory of functionals* (col prof. V. VOLTERRA). Blackie and Son, London, 1930. XIV+223 pp.
6. – *Soluzione per quadrature del problema di* CAUCHY-KOWALEWSKI *per le equazioni di tipo parabolico.* Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) **17**, 897-902 (1933).
7. – *Integrazione per quadrature dell'equazione parabolica generale a coefficienti costanti.* Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) **18**, 266-270 (1933).
8. – *Integrazione in termini finiti di ogni sistema od equazione a derivate parziali, lineare e a coefficienti costanti, d'ordine qualunque.* Atti Accad. Italia, Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **8**, 613-651 (1937).
9. – *Sulle soluzioni del problema di* CAUCHY *per tutti i sistemi di equazioni a derivate parziali lineari e a coefficienti costanti d'ordine qualunque.* Pont. Acad. Sci., Comment. **2**, 403-468 (1939).
10. – *La teoria dei funzionali analitici, le sue applicazioni e i suoi possibili indirizzi.* IX Convegno Volta, 1939.
11. – *Risoluzione in termini finiti del problema di* CAUCHY, *con dati iniziali su una ipersuperficie qualunque.* Atti Accad. Italia, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (7) **2**, 948-956 (1941).
12. – *Nuovi fondamenti della teoria dei funzionali analitici.* Atti Accad. Italia, Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **12**, 617-706 (1942).
13. – *L'indicatrice proiettiva dei funzionali lineari e i prodotti funzionali proiettivi.* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **22**, 181-289 (1943).
14. – *Teoria de los funcionales analiticos y sus aplicaciones.* Consejo Superior de Investigaciones Cientificas, Barcelona, 1943, 174 pp..

Direttore responsabile: A. MAMBRIANI Tip. Compositori - Bologna