GIANFRANCO CIMMINO (*)

Inversione delle corrispondenze funzionali lineari ed equazioni differenziali. (**)

Comunicazione al Convegno matematico di Parma, del 4-VI-1949. (1)

1. – Prototipo di tutti i problemi lineari è quello della risoluzione di un sistema di equazioni lineari

$$\sum_{1}^{n} {}_k\, a_{hk} x_k = b_h , \qquad (h = 1, 2, \ldots, m \lesseqgtr n). \tag{1}$$

Data la matrice dei coefficienti a_{hk} del sistema (1), dovrà necessariamente presentarsi o l'una, o l'altra delle due seguenti alternative:

I) o esiste (almeno) una soluzione x_k, qualunque siano i termini noti b_h,

II) o per l'esistenza di una soluzione x_k è necessario e sufficiente che i b_h verifichino una, o più condizioni del tipo

$$\sum_{1}^{m} {}_h\, \lambda_h b_h = 0 . \tag{2}$$

Il caso II) si presenta, quando, e solo quando, esistono sistemi di m numeri λ_h non tutti nulli, tali che risulti

$$\sum_{1}^{m} {}_h\, \lambda_h \sum_{1}^{n} {}_k\, a_{hk} x_k = 0 , \qquad \text{qualunque siano le } x_k, \tag{3}$$

(*) Professore o. dell'Università di Bologna. Indirizzo: Via Albertazzi, 6V - Bologna (Italia).

(**) Lavoro ricevuto il 4-VI-1949.

(1) Ho lasciato che venisse pubblicata la presente mia Comunicazione senza apportarvi mutamenti; il carattere divulgativo di essa giustifica la premessa di nozioni ormai classiche, e anche di natura del tutto elementare, come pure il tono di sommaria rassegna delle ricerche prese in considerazione, che non consentivà di entrare in maggior dettaglio.

e ciò equivale a dire che è

$$(4) \qquad \sum_1^m{}_h \lambda_h a_{hk} = 0\,, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

giacchè evidentemente sussiste l'identità (*formola di reciprocità*)

$$(5) \qquad \sum_1^m{}_h \lambda_h \sum_1^n{}_k a_{hk} x_k = \sum_1^n{}_k x_k \sum_1^m{}_h a_{hk} \lambda_h\,,$$

onde si vede che dalle (4) discende la (3), mentre inversamente la (3), applicata in particolare per esempio agli n sistemi $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}, \ldots, x_k^{(n)}$ definiti da
$x_k^{(j)} = \begin{cases} 0, & (k \neq j)\,, \\ 1, & (k = j)\,, \end{cases}$

$$(6) \qquad \sum_1^m{}_k \lambda_h \sum_1^n{}_k a_{hk} x_k^{(j)} = 0\,, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

fornisce appunto le (4).

Il sistema (4), ove si pensino le λ_h come incognite, si dirà *aggiunto omogeneo* del sistema (1). Si dimostra che per esso vi è un certo numero massimo p di soluzioni linearmente indipendenti, sicchè, indicate p soluzioni cosiffatte con $\lambda_h^{(1)}$, $\lambda_h^{(2)}, \ldots, \lambda_h^{(p)}$, la (2) varrà per ogni soluzione λ_h di (4), quando, e solo quando, saranno verificate le p relazioni

$$(2') \qquad \sum_1^m{}_h \lambda_h^{(i)} b_h = 0\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

che sono, dunque, le ***condizioni di compatibilità del sistema*** (1).

Ci troveremo nel caso I), quando invece non esiste nessuna soluzione non nulla λ_h del sistema (4).

2. – In linguaggio geometrico, la (1) è una *trasformazione lineare*, che muta i *vettori* $\boldsymbol{u} \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di S_n in vettori $\boldsymbol{u}^* \equiv (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ di S_m^*; scriveremo simbolicamente

$$(1) \qquad \mathfrak{L}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*\,.$$

La (2) è la condizione di ortogonalità del vettore $\boldsymbol{u}^*$ al vettore $\boldsymbol{v} \equiv (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$

$$(2) \qquad \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}^* = 0\,.$$

Se vale il caso I), vi sarà sempre (almeno) un $\boldsymbol{u}$ di S_n, tale che $\mathfrak{L}\boldsymbol{u}$ sia un $\boldsymbol{u}^*$ prefissato ad arbitrio in S_m^*, cioè la trasformazione è ***invertibile*** (in generale non univocamente), e ciò avverrà, quando un $\boldsymbol{v}$ di S_m^* ortogonale ai trasformati $\mathfrak{L}\boldsymbol{u}$ di tutti gli $\boldsymbol{u}$ di S_n non può essere che nullo.

Varrà, invece, II), quando esistono dei $\boldsymbol{v} \equiv (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ non nulli di S_m^* ortogonali a tutti gli $\mathfrak{L}\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{v} \times \mathfrak{L}\boldsymbol{u} = 0 , \qquad \text{qualunque sia } \boldsymbol{u}, \tag{3}$$

e tali $\boldsymbol{v}$ saranno tutti, e soli, quelli per cui

$$\mathfrak{L}^*\boldsymbol{v} = 0 , \tag{4}$$

dove $\mathfrak{L}^*$ è simbolo di una trasformazione lineare, tale che, per ogni $\boldsymbol{u}$ di S_n e ogni $\boldsymbol{v}$ di S_m^*, si abbia

$$\boldsymbol{v} \times \mathfrak{L}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \times \mathfrak{L}^*\boldsymbol{v} . \tag{5}$$

Vi sarà un massimo numero p di soluzioni linearmente indipendenti $\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(p)}$ di (4), sicchè la (2) varrà per ogni $\boldsymbol{v}$ soluzione di (4), se, e solo se, sarà

$$\boldsymbol{v}^{(i)} \times \boldsymbol{u}^* = 0 , \qquad (i = 1, 2, \ldots, p). \tag{2'}$$

Infine, affinchè valga la (4), basta che la (3) sia verificata soltanto per un particolare sistema opportunamente scelto di vettori $\boldsymbol{u}^{(j)}$ di S_n

$$\boldsymbol{v} \times L\boldsymbol{u}^{(j)} = 0 , \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

I risultati sulle equazioni differenziali lineari, che ora esporremo, sono tutti esempi di estensioni della teoria elementare, che abbiamo ricordata, a casi in cui, in luogo degli ordinari S_n e S_m^*, si abbiano due *spazi funzionali* Σ, Σ^*.

3. – Gli spazi Σ, di cui parleremo, sono classi di enti, che diremo ancora *vettori*, o *punti*, per cui vale quanto segue.

1°) È data una corrispondenza, che a ogni coppia $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ di vettori di Σ associa un vettore di Σ, da indicarsi con $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$, per la quale è sempre $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_1$, $(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) + \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 + (\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3)$, da $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3$ segue $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3$ e vi è un unico vettore $\mathbf{0}$ di Σ, tale che $\boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \boldsymbol{u}$, per ogni $\boldsymbol{u}$ di Σ.

2°) È data una corrispondenza, che ad ogni coppia a, $\boldsymbol{u}$ di un numero reale e di un vettore di Σ associa un vettore di Σ, da indicarsi con $a\boldsymbol{u}$, per la quale è sempre

$$(a_1 + a_2)\boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{u} + a_2\boldsymbol{u} , \quad a(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = a\boldsymbol{u}_1 + a\boldsymbol{u}_2 , \quad a_1(a_2\boldsymbol{u}) = a_1a_2\boldsymbol{u} ,$$

$$1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} , \quad 0\boldsymbol{u} = \mathbf{0} , \quad a\mathbf{0} = \mathbf{0} ,$$

da $a_1 u = a_2 u$, con $u \neq 0$, segue $a_1 = a_2$, da $a u_1 = a u_2$, con $a \neq 0$, segue $u_1 = u_2$, e per definizione si porrà $(-1)u = -u$, $u_1 + (-u_2) = u_1 - u_2$.

3°) È data una corrispondenza, che ad ogni u di Σ associa un numero $\geqslant 0$, da indicarsi con $|u|$ (*norma di* u), nullo solo se $u = 0$ e tale che $|au| = |a| \cdot |u|$, $|u_1 + u_2| \leqslant |u_1| + |u_2|$, e per definizione si dirà *distanza* $u_1 u_2$ la $|u_1 - u_2|$ e si dirà che $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = u$ se $\lim\limits_{n \to \infty} |u - u_n| = 0$.

4°) Per ogni successione di vettori u_n di Σ, per cui sia $\lim\limits_{p, q \to \infty} |u_p - u_q| = 0$, vi è un ben determinato vettore u di Σ, tale che $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = u$.

I più semplici e noti esempi di spazi Σ cosiffatti (*lineari*, in quanto vale 1°) e 2°), *metrici* e *completi*, in quanto vale rispettivamente 3°) e 4°)), oltre gli ordinari S_n, sono dati (ove si intenda la nozione di combinazione lineare nel senso usuale) dalle classi di tutte le funzioni f definite in un intervallo $\mathcal{J}$ e verificanti una delle seguenti condizioni:

a) f continua, ove si ponga $|u| = \max |f|$ in $\mathcal{J}$,

b) f a variazione limitata, ove di ponga $|u| =$ var. tot. f in $\mathcal{J}$,

c) f misurabile e, a prescindere eventualmente dai punti di un insieme di misura nulla, limitata, ove si ponga $|u| =$ minimo degli estremi superiori delle funzioni limitate coincidenti quasi dappertutto con $|f|$ in $\mathcal{J}$,

d) f sommabile, ove si ponga $|u| = \int\limits_{\mathcal{J}} |f|\, dx$,

e) f sommabile insieme con $|f|^p$, $(p > 1)$, ove sia $|u| = \Big(\int\limits_{\mathcal{J}} |f|^p dx\Big)^{1/p}$,

considerando come rappresentanti uno stesso vettore u nel caso *b*) due funzioni differenti fra loro per una costante, nei casi *c*), *d*), *e*) due funzioni coincidenti fra loro quasi dappertutto in $\mathcal{J}$.

Non sempre per due vettori u_1, u_2 di Σ abbiamo una nozione analoga a quella di prodotto scalare fra due vettori di S_n. Tuttavia a ogni spazio lineare metrico completo Σ si può associare un altro spazio lineare metrico completo Σ', che diremo *duale di* Σ, per cui si può stabilire la nozione di *prodotto scalare fra vettori* u *di* Σ *e vettori* v di Σ', come una corrispondenza, che a coppie u, v di vettori cosiffatti associa un numero reale, da indicarsi con $u \times v$, con le seguenti proprietà: è sempre

$$au \times v = u \times av = a \cdot u \times v\,, \quad (u_1 + u_2) \times v = u_1 \times v + u_2 \times v\,,$$

$$u \times (v_1 + v_2) = u \times v_1 + u \times v_2\,,$$

$$\lim_{n \to \infty} u_n \times v_n = u \times v, \quad \text{se} \quad \lim_{n \to \infty} u_n = u, \quad \lim_{n \to \infty} v_n = v,$$

e inoltre (e su questo punto richiamiamo particolarmente l'attenzione, perchè su esso è imperniato quanto ora diremo) *ogni sottospazio lineare completo di* Σ *riesce formato da vettori* $\boldsymbol{u}$ *tutti ortogonali ad almeno un* $\boldsymbol{v}$ *di* Σ', *che non è ortogonale a tutti gli* $\boldsymbol{u}$ *di* Σ, *in particolare non è nullo.*

Questo risultato fondamentale è stato ottenuto fra il 1927 e il 1932 indipendentemente da HAHN, BANACH, ASCOLI [2].

Negli esempi ora ricordati, abbiamo che *b*) è spazio duale di *a*) (asserzione equivalente a un famoso teorema di RIESZ), *d*) è duale di *c*) e viceversa, *e*) per un certo valore di p è duale a *e*) stesso, ove si ponga $\frac{p}{p-1}$ in luogo di p. In particolare, per $p = 2$, *e*) è duale di se stesso (*spazio hilbertiano*).

Ciò posto, ci si può valere del seguente procedimento generale, per ottenere teoremi di esistenza delle soluzioni nei problemi lineari dell'Analisi. *Si interpretino l'incognita, o le incognite, del problema come un vettore* $\boldsymbol{u}$ *di uno spazio* Σ *e il dato, o i dati, come un vettore* $\boldsymbol{u}^*$ *di un altro spazio* Σ^*, *in modo che il problema venga a consistere nella ricerca di un* $\boldsymbol{u}$ *di* Σ, *il cui trasformato* $\mathfrak{L}\boldsymbol{u}$ *in una certa corrispondenza lineare* (1) *fra* Σ *e* Σ^* *sia un dato* $\boldsymbol{u}^*$ *di* Σ^*. *Si scriva la condizione* (3) *che un vettore* $\boldsymbol{v}$ *dello spazio* Σ' *duale di* Σ^* *sia ortogonale ai trasformati* $\mathfrak{L}\boldsymbol{u}$ *di tutti gli* $\boldsymbol{u}$ *di* Σ: *si dovrà trovare che questa condizione equivale per* $\boldsymbol{v}$ *a essere soluzione di un problema da considerarsi come aggiunto omogeneo del problema dato. Se questo aggiunto omogeneo non ha altra soluzione che lo zero, o, per lo meno, se ogni sua soluzione è necessariamente ortogonale a tutti gli* $\boldsymbol{u}^*$ *di* Σ^*, *allora il problema proposto dovrà ammettere sempre soluzione, qualunque siano i dati rappresentati da* $\boldsymbol{u}^*$; *nel caso contrario, il problema dovrà ammettere soluzione, soltanto a patto che siano verificate certe condizioni di compatibilità* (2), *consistenti nell'ortogonalità di* $\boldsymbol{u}^*$ *ad ogni* $\boldsymbol{v}$ *di* Σ', *che sia ortogonale ai trasformati* $\mathfrak{L}\boldsymbol{u}$ *di tutti gli* $\boldsymbol{u}$ *di* Σ, *e non a tutti gli* $\boldsymbol{u}^*$ *di* Σ^*.

Vi sono, beninteso, problemi lineari, cui non può applicarsi il nostro procedimento, ma il grande valore euristico di questo è già sufficientemente posto in luce, crediamo, dalle applicazioni, che ora ne indicheremo.

---

[2] L'enunciato del testo è effettivamente la traduzione nel linguaggio qui usato e sotto le ipotesi particolari qui occorrenti, di una proposizione, che, con diverse terminologie e in ipotesi pure lievemente variabili dall'uno all'altro dei tre Autori, si trova in H. HAHN, *Über lineare Gleichungsysteme in linearen Räumen*, J. Reine Angew. Math., **157**, 214-229 (1927), (v. pag. 218); S. BANACH, *Sur les fonctionelles linéaires*, Studia Math., **1**, 211-216, 223-239 (1929), (v. pag. 216); G. ASCOLI, *Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà lineari*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **10**, 33-81, 203-232 (1932), (v. pag. 211).

4. – Ricordiamo, come prima in ordine di tempo, la ricerca di CACCIOPPOLI ([3]) sull'*equazione di* POISSON *su una superficie chiusa.*

La superficie S viene supposta definita topologicamente mediante la nozione di *intorno* per ogni suo punto e la rappresentazione degli intorni stessi su intorni piani, con la condizione che il passaggio da una ad un'altra rappresentazione di un medesimo intorno di un punto di S si rifletta sempre in una rappresentazione conforme dell'uno sull'altro dei due intorni piani corrispondenti. Il *laplaciano* di una funzione definita su S, calcolato rispetto ai parametri della rappresentazione di un intorno su questa, varierà al variare della rappresentazione stessa, venendo a moltiplicarsi per il determinante jacobiano dei vecchi parametri rispetto ai nuovi, sicchè non esso, ma la funzione additiva di insieme ottenuta integrandolo su un insieme variabile di punti di S, avrà significato intrinseco sulla superficie, e tale funzione di insieme verrà interpretata come rappresentante una *distribuzione di masse* (positive e negative) sulla S, di cui il detto laplaciano rappresenterà la *densità*.

Ciò posto, si può definire lo spazio Σ in modo che i suoi vettori siano rappresentati dalle funzioni u assolutamente continue su S, dotate di laplaciano (in un senso opportunamente generalizzato) di p-ma potenza sommabile, assumendo come trasformazione lineare $\mathcal{L}$ applicata ai vettori $\boldsymbol{u}$ di Σ quella che ad ogni funzione u cosiffatta associa la distribuzione di masse μ_u avente per densità il detto laplaciano Δu; si può poi definire lo spazio Σ^*, in cui varia il vettore trasformato $\mathcal{L}\boldsymbol{u}$, in modo che i suoi vettori siano rappresentati da tutte le distribuzioni di masse μ su S, con densità f di p-ma potenza sommabile. Il problema di risolvere l'equazione di POISSON $\Delta u = f$ su tutta la S consiste nell'invertire la detta corrispondenza funzionale lineare, cioè trovare la funzione u in modo che la distribuzione di masse μ_u avente per densità Δu sia una data μ di densità f. Lo spazio duale Σ' di Σ^* diventa ora quello delle funzioni v di $p/(p-1)$-esima potenza sommabile. CACCIOPPOLI dimostra che una v di Σ', ortogonale a tutte le μ_u trasformate in $\mathcal{L}$ delle u di Σ (nel senso che sia $\int_S v\, d\mu_u = 0$), deve essere (soluzione del problema aggiunto omogeneo, cioè) coincidente quasi dappertutto con una funzione armonica su tutta la S, cioè con una costante.

Si avrà allora una sola condizione di compatibilità per il problema proposto: quella che il secondo membro f dell'equazione di POISSON sia densità di una distribuzione di masse μ, che riesca ortogonale alle costanti su S,

([3]) R. CACCIOPPOLI, *Sui teoremi di esistenza di* RIEMANN, Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli (4) **4**, 49-54 (1934), e Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) **7**, 73-96 (1938).

e cioè tale che l'ammontare complessivo delle masse positive uguagli in valore assoluto quello delle masse negative.

CACCIOPPOLI osserva inoltre che il ragionamento si può condurre in modo perfettamente simile, modificando la definizione dello spazio Σ, col supporre il laplaciano di u continuo, anzichè di p-ma potenza sommabile, e corrispondentemente definendo Σ^* come costituito da tutte le distribuzioni di masse μ su S con densità f continua e il duale Σ' da tutte le funzioni additive d'insieme, a variazione limitata.

Due interessanti applicazioni di questi risultati sono indicati pure da CACCIOPPOLI, una alla dimostrazione del teorema di esistenza degli integrali abeliani delle tre specie su una qualsiasi superficie di RIEMANN, l'altra alla dimostrazione della possibilità di rappresentare conformemente su un cerchio ogni superficie aperta topologicamente equivalente a un cerchio, almeno sotto certe ipotesi di regolarità.

5. – A questi lavori di CACCIOPPOLI ha fatto immediatamente seguito una mia ricerca [4] sulle *equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine di tipo ellittico su una superficie chiusa* S. Qui si sostituisce all'equazione di POISSON una qualsivoglia equazione $Eu = f$ del tipo detto; ancora la S si suppone definita topologicamente a mezzo degli intorni dei suoi punti, ma non occorre più che, nel passaggio da una ad un'altra rappresentazione parametrica di uno stesso intorno, dai vecchi ai nuovi parametri si passi mediante una rappresentazione conforme, basterà che valga la continuità delle derivate parziali prime e seconde degli uni rispetto agli altri.

Anche qui come spazio Σ assumiamo quello delle u, per cui Eu esiste (almeno in un senso opportunamente generalizzato) e rappresenta una densità di p-ma potenza sommabile, come trasformazione lineare $\mathfrak{E}$ applicata ai vettori $\boldsymbol{u}$ di Σ quella che ad ogni funzione u cosiffatta associa la distribuzione di masse μ_u avente per densità il detto Eu; come spazi Σ^*, Σ' gli stessi di prima. Si dimostra che, se v rappresenta un vettore $\boldsymbol{v}$ di Σ' ortogonale (a tutte le distribuzioni di masse μ_u aventi per densità un Eu, cioè) a tutti i vettori $\mathfrak{E}\boldsymbol{u}$ di Σ^* trasformati di vettori $\boldsymbol{u}$ di Σ, allora v dovrà coincidere quasi dappertutto con una soluzione del problema aggiunto omogeneo, cioè soluzione dell'equazione $E^*v = 0$ aggiunta omogenea della $Eu = f$.

Qui, al contrario del caso dell'equazione di POISSON, non è detto che vi sia, sempre e soltanto, la soluzione $v = \text{cost.}$, bensì potrà darsi o I) che non vi sia altra soluzione all'infuori dello zero, oppure II) che vi sia un certo

---

(4) G. CIMMINO, *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico sopra una superficie chiusa*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) 7, 73-96 (1938).

numero massimo p di soluzioni linearmente indipendenti $v_1, v_2, \ldots, v_p$, e allora la $Eu = f$ nel caso I) ammetterà soluzione, qualunque sia f, nel caso II) ammetterà soluzione, quando, e solo quando, sono verificate certe condizioni di compatibilità, consistenti nella ortogonalità della f alle dette $v_1, v_2, \ldots, v_p$ su S.

Nello stesso ordine di idee è da ricordare un lavoro di ZWIRNER (5), in cui la ricerca analoga è svolta per una *equazione alle derivate parziali totalmente ellittica del* 4° *ordine su una superficie chiusa.*

6. – Subito dopo lo studio, di cui ora ho detto, io mi sono proposto (6) di applicare lo stesso metodo al caso del *problema di* DIRICHLET *per un'equazione generale di tipo ellittico del* 2° *ordine in un dominio piano* $\mathcal{D}$

$$Eu = f \quad \text{in} \quad \mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}\,, \qquad u = \varphi \ \text{su} \ \mathcal{F}\mathcal{D}. \tag{7}$$

Qui, per applicare il solito procedimento, bisognava definire lo spazio Σ come costituito da funzioni u in $\mathcal{D}$ e il trasformato Σ^* come costituito dalle coppie formate da una f in $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$ e da una φ su $\mathcal{F}\mathcal{D}$, soggette a opportune condizioni. Per semplificare, poniamoci nel caso hilbertiano, supponendo f e φ di quadrato sommabile. Allora Σ sarà costituito dalle u, per cui Eu (definito in un senso opportunamente generalizzato) è di quadrato sommabile in $\mathcal{D}$ e i valori assunti (in un senso pure opportunamente generalizzato) su $\mathcal{F}\mathcal{D}$ sono di quadrato sommabile sulla $\mathcal{F}\mathcal{D}$ medesima, Σ^* sarà costituito dalle coppie (f di quadrato sommabile in $\mathcal{D}$), (φ di quadrato sommabile su $\mathcal{F}\mathcal{D}$), lo spazio duale Σ' è lo stesso Σ^*. Si tratta di dimostrare che una coppia v, ψ di Σ' ortogonale a tutte le coppie (Eu in $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$), ($u$ su FD) di Σ' stesso, trasformate delle u di Σ, nel senso che sia

$$\iint_{\mathcal{D}} vEu\,dx\,dy + \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \psi u\,ds = 0,$$

dovrà necessariamente essere soluzione del problema aggiunto omogeneo. Effettivamente si trova che la v dovrà coincidere quasi dappertutto in $\mathcal{D}$ con una soluzione dell'equazione aggiunta $E^*v = 0$ nulla su $\mathcal{F}\mathcal{D}$ e, almeno sotto certe ipotesi di regolarità su $\mathcal{F}\mathcal{D}$, la ψ dovrà coincidere quasi dappertutto su $\mathcal{F}\mathcal{D}$ con una certa espressione lineare nella v e nelle sue derivate parziali prime.

---

(5) G. ZWIRNER, *Su una particolare classe di equazioni alle derivate parziali del quarto ordine sopra una superficie chiusa*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **17**, 139-159 (1946).

(6) G. CIMMINO, *Nuovo tipo di condizione al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di* DIRICHLET, Rend. Circ. Mat. Palermo **61**, 177-221 (1938).

Se, in particolare, una v, per cui sia

$$E^* v = 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}, \qquad v = 0 \ \text{su} \ \mathcal{F}\mathcal{D} \tag{8}$$

non può essere che identicamente nulla, il problema (7) sarà sempre risolubile, senza che occorrano condizioni di compatibilità, mentre nel caso contrario si hanno le solite condizioni di compatibilità, cui dovrà soddisfare la coppia f, φ, consistenti in una certa relazione di ortogonalità rispetto a ogni soluzione v non nulla di (8).

Si ha così la soluzione di un *problema generalizzato di* DIRICHLET, che si riduce al problema ordinario, se f e φ sono continue.

Nel caso particolare dell'equazione di POISSON, ho ottenuto poi in una successiva memoria [7] risultati più precisi, per un qualsiasi numero di variabili, mostrando fra l'altro come si possa sostituire nella teoria ora esposta all'insieme $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$ un insieme aperto di tipo assai più generale. E qui vi sarebbe certo ancora molto da indagare sulle possibilità del nostro metodo in quei casi, in cui i valori dati al contorno non possono intendersi che assunti in un senso opportunamente generalizzato, non riuscendo, a causa della natura irregolare del contorno stesso, sempre risolubile il problema ordinario di DIRICHLET.

7. – Al problema ordinario di DIRICHLET per le funzioni armoniche

$$\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}, \qquad u = \varphi \ \text{su} \ \mathcal{F}\mathcal{D} \tag{9}$$

ha successivamente dedicato MIRANDA una breve Nota [8], sempre attenendosi all'ordine di idee cui ci riferiamo.

Sia ora Σ lo spazio delle funzioni u armoniche in $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$ continue in $\mathcal{D}$; come trasformazione lineare $\mathcal{L}$ applicata al vettore $\boldsymbol{u}$ di Σ rappresentato da una funzione u cosiffatta assumiamo quella, che associa alla u i suoi valori su $\mathcal{F}\mathcal{D}$, come spazio Σ^* quello delle funzioni φ continue su $\mathcal{F}\mathcal{D}$, e infine come duale Σ' avremo quello delle funzioni additive a variazione limitata μ degli insiemi di $\mathcal{F}\mathcal{D}$. MIRANDA dimostra, in base ad alcune proprietà dei potenziali rappresentati da integrali di STIELTJES, sotto certe ipotesi di regolarità sulla $\mathcal{F}\mathcal{D}$, che una μ cosiffatta (rappresentante un vettore $\boldsymbol{v}$ di Σ') ortogonale ai trasformati $\mathcal{L}\boldsymbol{u}$ di tutti gli $\boldsymbol{u}$ di Σ, cioè tale che $\int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} u\, d\mu = 0$

[7] G. CIMMINO, *Sul problema generalizzato di* DIRICHLET *per l'equazione di* POISSON, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 11, 28-29 (1940).

[8] C. MIRANDA, *Sul principio di* DIRICHLET *per le funzioni armoniche*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) 3, 55-59 (1947).

per tutte le u suddette, sarà ortogonale a tutti gli $\boldsymbol{u}^*$ di Σ^*, cioè tale che $\int_{\mathcal{FD}} \varphi\, d\mu = 0$ per tutte le φ continue su $\mathcal{FD}$, e pertanto non vi sono condizioni di compatibilità, il problema (9) è sempre possibile.

Con analoghe considerazioni Miranda ha ottenuto poi [9] la dimostrazione della esistenza della soluzione del problema biarmonico fondamentale in due variabili

$$(10) \qquad \Delta\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{D} - \mathcal{FD}\,, \qquad u = \varphi\,, \quad \frac{du}{dn} = \psi \ \text{su}\, \mathcal{FD}\,,$$

sempre sotto certe ipotesi di regolarità su $\mathcal{FD}$, con φ, φ', ψ supposte continue.

Qui i vettori $\boldsymbol{u}$ di Σ rappresenteranno funzioni u biarmoniche in $\mathcal{D} - \mathcal{FD}$ e continue con le derivate parziali prime in $\mathcal{D}$, la trasformazione $\mathcal{L}$ applicata a tali $\boldsymbol{u}$ sarà quella, che ad ogni funzione u cosiffatta associa la coppia di funzioni continue (u su $\mathcal{FD}$), $\left(\frac{du}{dn}\text{ su }\mathcal{FD}\right)$, i vettori $\boldsymbol{u}^*$ di Σ^* rappresenteranno arbitrarie coppie di funzioni φ, ψ continue su $\mathcal{FD}$, per cui φ' sia anche continua su $\mathcal{FD}$, come vettori dello spazio duale Σ' possiamo intendere terne di funzioni λ, λ_1, μ additive a variazione limitata degli insiemi di punti di $\mathcal{FD}$. Miranda dimostra che, se la relazione di ortogonalità $\int_{\mathcal{FD}} u\, d\lambda + \int_{\mathcal{FD}} u'\, d\lambda_1 + \int_{\mathcal{FD}} \frac{du}{dn}\, d\mu = 0$ sussiste per tutte le funzioni u suddette, allora sarà pure $\int_{\mathcal{FD}} \varphi\, d\lambda + \int_{\mathcal{FD}} \varphi'\, d\lambda_1 + \int_{\mathcal{FD}} \psi\, d\mu = 0$ per tutte le suddette coppie φ, ψ, sicchè, qualunque sia questa coppia, il problema (10) avrà sempre soluzione.

Molti altri esempi, oltre quelli fin qui portati, si potrebbero mostrare, di applicazione del procedimento euristico sopra indicato, anche fuori del campo delle equazioni differenziali (come per esempio nella teoria delle equazioni integrali, nel problema dei momenti) e sarebbe pure molto interessante guardare sotto l'angolo visuale qui adottato i metodi usati con successo in questo campo da Picone, Amerio, Ghizzetti, Fichera e altri.

8. – Diremo da ultimo poche parole sulla approssimazione delle soluzioni, guardata dal nostro punto di vista.

Anzitutto, anche nel caso delle corrispondenze tra spazi funzionali si potrà talvolta sostituire alla (3) il sistema delle (6) per un opportuno sistema di vettori $\boldsymbol{u}^{(1)}$, $\boldsymbol{u}^{(2)}$,... di Σ, avendosi ugualmente di conseguenza che il vet-

---

(9) C. Miranda, *Formule di maggiorazione e teorema di esistenza per le funzioni biarmoniche di due variabili*, Giorn. Mat. Battaglini **78**, 97-118 (1948).

tore $\boldsymbol{v}$ dovrà essere una soluzione di (4), e allora, se accade, per esempio, che la (4) non abbia altra soluzione che lo zero, il sistema dei vettori $\mathcal{L}\boldsymbol{u}^{(1)}$, $\mathcal{L}\boldsymbol{u}^{(2)}$,... di Σ^* riuscirà completo e mediante combinazioni lineari di tali vettori si potrà quindi approssimare ogni vettore $\boldsymbol{u}^*$ di Σ^* secondo la metrica fissata in questo spazio.

Così, per esempio, nel caso del problema (7), se accade che il problema (8) non abbia altra soluzione che lo zero, indicata con $u^{(1)}$, $u^{(2)}$,... una qualsiasi successione di polinomi, tale che ogni polinomio sia rappresentabile come una combinazione lineare di essi, si può vedere che, qualunque siano le f e φ di quadrato sommabile, vi sarà sempre una successione di combinazioni lineari

$$w_n = c_{n1}u^{(1)} + c_{n2}u^{(2)} + \dots + c_{nn}u^{(n)}\,, \tag{11}$$

tale che Ew_n converga in media a f in $\mathcal{D}$ e contemporaneamente w_n converga in media a φ su $\mathcal{F}\mathcal{D}$, e si può provare che di conseguenza la successione delle w_n convergerà allora uniformemente in ogni dominio interno a $\mathcal{D}$ alla soluzione di (7).

Tradurrò, per finire, nel linguaggio costantemente usato in questo scritto, onde mostrare come pure possa farsi rientrare nello schema generale che abbiamo indicato, il ragionamento, di cui si è valso MIRANDA in una Nota recente [10], per dimostrare la approssimabilità uniforme di ogni funzione armonica in un dominio $\mathcal{D}$ mediante combinazioni lineari delle funzioni di una certa assegnata successione fondamentale di funzioni armoniche $u^{(1)}$, $u^{(2)}$,..., per esempio quelle, che su certe sfere si riducono alle relative funzioni sferiche fondamentali.

I vettori $\boldsymbol{u}$ di Σ siano ora rappresentati dalle tabelle di costanti

$$c_{n1}, c_{n2}, \dots, c_{nn}\,, \qquad (n = 1, 2, \dots) \tag{12}$$

tali che le (11) costituiscano una successione uniformemente convergente in un dato dominio $\mathcal{D}$. La trasformazione lineare $\mathcal{L}$ sia quella, che muta il vettore $\boldsymbol{u}$ rappresentato da una tabella (12) cosiffatta nella funzione continua su $\mathcal{F}\mathcal{D}$, che è $= \lim\limits_{n\to\infty} w_n$ su $\mathcal{F}\mathcal{D}$. Lo spazio Σ^* sia quello di tutte le funzioni φ continue su $\mathcal{F}\mathcal{D}$ e il duale Σ', al solito, quello delle funzioni μ additive e a variazione limitata degli insiemi di punti di $\mathcal{F}\mathcal{D}$. È agevole riconoscere che, fissata opportunamente la successione fondamentale di funzioni armoniche $u^{(\nu)}$, se una μ è ortogonale a tutte le $\lim\limits_{n\to\infty} w_n$ suddette su $\mathcal{F}\mathcal{D}$,

---

[10] C. MIRANDA, *Sull'approssimazione delle funzioni armoniche in tre variabili*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) 4, 530-533 (1948).

essa sarà pure ortogonale a tutte le φ continue su $\mathcal{FD}$, e allora vuol dire che, qualunque sia la φ continua su $\mathcal{FD}$, vi sarà una tabella di costanti (12), per cui la (11) convergerà uniformemente su $\mathcal{FD}$ alla φ, e quindi in $\mathcal{D}$ alla funzione armonica in $\mathcal{D} - \mathcal{FD}$ assumente i valori φ su $\mathcal{FD}$.

Analogo risultato è stato ottenuto da Miranda nel già citato lavoro sul problema biarmonico fondamentale ([11]), relativamente all'approssimazione delle funzioni biarmoniche in un dato dominio mediante combinazioni lineari di funzioni biarmoniche di una data successione fondamentale.

([11]) Cfr. annotazione ([9]).