GUIDO TORRIGIANI (*)

Sulle funzioni di più variabili a variazione limitata. (**)

Introduzione.

1. – L. TONELLI (1) ha dimostrato il seguente teorema di convergenza sulle serie doppie di FOURIER:

Teorema A. *Sia $f(x, y)$ una funzione periodica di periodo 2π rispetto ad x e rispetto ad y, quasi continua e generalmente a variazione limitata* (2) *nel*

(*) Dott.. Indirizzo: Via Tacchinardi, 1 - Livorno (Italia).

(**) Lavoro eseguito, nel 1942, nel Seminario matematico della Scuola Normale Superiore di Pisa. Ricevuto il 1-XI-1948.

(1) L. TONELLI, *Sulle serie doppie di* FOURIER, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, (2) 6, 315-316 (1937).

(2) Una funzione, definita nel quadrato fondamentale $A \equiv (0, 1; 0, 1)$ si dice *a variazione limitata (secondo* TONELLI) se, indicata per ogni $\bar{x}$ $(0 \leq \bar{x} \leq 1)$ con $V_y(\bar{x})$ la variazione totale della $f(\bar{x}, y)$ — considerata come funzione della sola y nell'intervallo $(0, 1)$ — e definita analogamente $V_x(\bar{y})$, le funzioni $V_y(x)$ e $V_x(y)$ risultano, nei rispettivi intervalli $(0, 1)$, quasi ovunque finite, quasi continue e integrabili L. (Cfr. nelle righe seguenti loc. cit. in (a) alla fine di questa nota (2)). Le funzioni $V_y(x)$ e $V_x(y)$ si dicono le *variazioni totali* della funzione $f(x, y)$. Si indica inoltre, per ogni punto $(\bar{x}, \bar{y})$ di A, con $V_y(\bar{x}, \bar{y})$ la variazione totale della funzione $f(\bar{x}, y)$ considerata come funzione della sola y nell'intervallo $(0, \bar{y})$. Analogamente si definisce $V_x(\bar{x}, \bar{y})$.

Il TONELLI ha introdotto la precedente definizione nella risoluzione del problema della quadratura delle superficie continue in forma ordinaria e ha dimostrato fra l'altro che la proprietà di essere a variazione limitata è, per le funzioni continue, indipendente dalla direzione degli assi. Ciò non vale per le funzioni discontinue, come hanno rilevato C. R. ADAMS e J. A. CLARKSON (b), i quali, fra l'altro, per ovviare alle difficoltà incontrate nel dimostrare la quasi continuità delle funzioni $V_y(x)$ e $V_x(y)$ hanno introdotto una definizione apparentemente più generale di quella del TONELLI, nella quale si ammette che la $V_x(y)$ e la $V_y(x)$ siano soltanto non maggiori di opportune funzioni quasi ovunque finite quasi continue e integrabili L. L. CESARI (c) ha tuttavia dimostrato che se, nel calcolare, ai sensi della definizione del TONELLI, le funzioni $V_y(x)$ e $V_x(y)$ si trascurano opportuni insiemi di punti (x, y) di A di misura superficiale nulla, allora, per ogni funzione quasi continua $f(x, y)$, le funzioni $V_y(x)$ e $V_x(y)$, (nonchè tutte le funzioni — della sola x e della sola y — $V_y(x, \bar{y})$ e $V_x(\bar{x}, y)$), risultano sicuramente quasi continue. Il CESARI ha inoltre dimostrato che anche per le funzioni $f(x, y)$ discontinue la proprietà di essere a variazione limitata — le variazioni totali essendo *quadrato fondamentale* $Q \equiv (0, 2\pi; 0, 2\pi)$. *Se* (x_0, y_0) *è un punto di* Q *e ad ogni numero* $\varepsilon > 0$ *arbitrario si può far corrispondere un altro numero* $\lambda > 0$ *tale che per ogni* $0 < \delta < \lambda$ *si abbia*

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{2\delta}\displaystyle\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} | V_x(x_0 + \lambda, y) - V_x(x_0 + 0, y) | \, dy < \varepsilon , \\ \dfrac{1}{2\delta}\displaystyle\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} | V_x(x_0 - \lambda, y) - V_x(x_0 - 0, y) | \, dy < \varepsilon , \\ \dfrac{1}{2\delta}\displaystyle\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} | V_y(x, y_0 + \lambda) - V_y(x, y_0 + 0) | \, dx < \varepsilon , \\ \dfrac{1}{2\delta}\displaystyle\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} | V_y(x, y_0 - \lambda) - V_y(x, y_0 - 0) | \, dx < \varepsilon , \end{array}\right.$$

allora la serie doppia di FOURIER *converge* (*nel senso di* STOLZ *e* PRINGSHEIM) *nel punto* (x_0, y_0).

Il TONELLI ha inoltre dimostrato che se $f(x, y)$ è una funzione periodica di periodo 2π rispetto ad x e rispetto ad y, quasi continua e generalmente a variazione limitata in Q, allora in quasi tutti i punti di Q sono verificate le condizioni del teorema A, e perciò la serie doppia di FOURIER della $f(x, y)$ converge quasi ovunque in Q. La sua somma coincide inoltre quasi ovunque

---

calcolate trascurando opportuni insiemi di punti (x, y) di A di misura superficiale nulla — risulta indipendente dalla direzione degli assi. L. TONELLI (d), ritrovando per via più breve quest'ultimo risultato del CESARI, ha chiamato *funzione generalmente a variazione limitata* (funzione T secondo CESARI (c)) ogni funzione $f(x, y)$ per la quale esista un insieme E di punti di A di misura superficiale nulla tale che le funzioni $V_x(y)$ e $V_y(x)$, calcolate trascurando completamente i valori assunti da $f(x, y)$ in E, sono quasi ovunque finite, quasi continue e integrabili L.

Le funzioni continue generalmente a variazione limitata sono anche a variazione limitata e, per quanto ha dimostrato L. CESARI, le relative funzioni $V_x(y)$ e $V_y(x)$ nonchè tutte le funzioni $V_y(x, \bar{y})$ e $V_x(\bar{x}, y)$ sono quasi continue.

(a) L. TONELLI, *Sulla quadratura delle superficie*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., (6) **2** (1926), v. p. 357; *Sur la quadrature des surfaces*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, **182** (1926), v. p. 1198; *Serie Trigonometriche*, Bologna 1928, v. p. 443.

(b) C. R. ADAMS and J. A. CLARKSON, *Properties of functions $f(x, y)$ of bounded variation*, Transaction of Amer. Math. Soc., **36**, 711-730 (1934).

(c) L. CESARI, *Sulle funzioni a variazione limitata*, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, (2) **5** (1936), v. p. 299.

(d) L. TONELLI, *Sulle funzioni di due variabili generalmente a variazione limitata*, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, (2) **5** (1936), v. p. 315.

in Q con la funzione generatrice. Ne risulta [3] perciò il seguente teorema, precedentemente dimostrato da L. CESARI [4]:

Teorema B. *Se $f(x, y)$ è una funzione periodica di periodo 2π rispetto ad x e rispetto ad y, quasi continua e generalmente a variazione limitata nel quadrato fondamentale Q, la sua serie doppia di* FOURIER *converge quasi ovunque in Q (nel senso di* STOLZ *e* PRINGSHEIM*) verso la funzione generatrice $f(x, y)$.*

Questa proposizione costituisce una estensione alle serie doppie di FOURIER del ben noto criterio di DIRICHLET-JORDAN [5] per la convergenza delle serie di FOURIER delle funzioni di una sola variabile.

La dimostrazione, data dal TONELLI, del fatto che in quasi tutti i punti (x_0, y_0) di Q risultano verificate le condizioni per la convergenza del teorema A, si appoggia sul fatto che le funzioni $V_y(x)$ e $V_x(y)$ (come pure tutte le funzioni — della sola x e della sola y rispettivamente — $V_y(x, \bar{y})$ e $V_x(\bar{x}, y)$, $0 \leqslant \bar{y} \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \bar{x} \leqslant 2\pi$) verificano quasi ovunque in $(0, 2\pi)$, in forza del teorema fondamentale di LEBESGUE [6], le relazioni

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\delta} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} V_y(x)\, dx = V_y(x_0), \qquad \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} V_x(y)\, dy = V_x(y_0).$$

2. – Un'indagine che, estendendo il teorema A alle funzioni di più di due variabili, si proponesse di estendere in modo analogo il teorema B dovrebbe in primo luogo cercare di stabilire se per tali funzioni l'ipotesi che siano a variazione limitata porti di conseguenza il verificarsi delle seguenti condizioni:

α) Ad ogni punto (x_0, y_0, z_0) del cubo fundamentale $C \equiv (0, 2\pi; 0, 2\pi; 0, 2\pi)$ e ad ogni numero $\varepsilon > 0$ arbitrario si può far corrispondere un altro numero $\lambda > 0$ tale che, per ogni $0 \leqslant \alpha \leqslant \lambda$, $0 \leqslant \beta \leqslant \lambda$, si abbia

$$\frac{1}{4\alpha\beta} \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} \int_{y_0-\beta}^{y_0+\beta} (V_z(x, y, z_0 + \lambda) - V_z(x, y, z_0 + 0))\, dx\, dy < \varepsilon,$$

$$\frac{1}{4\alpha\beta} \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} \int_{y_0-\beta}^{y_0+\beta} (V_z(x, y, z_0 - \lambda) - V_z(x, y, z_0 - 0))\, dx\, dy < \varepsilon,$$

e analoghe relazioni scambiando fra loro x, y, z.

---

(3) L. TONELLI, loc. cit. in (1).

(4) L. CESARI, *Sulle funzioni di due variabili a variazione limitata secondo* TONELLI *e sulla convergenza delle relative serie doppie di* FOURIER, Rend. Semin. Mat. Univ. Roma, 1937.

(5) C. JORDAN, *Séries de* FOURIER, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, **92**, 228-230 (1881); e altresì L. TONELLI, *Serie Trigonometriche*, Bologna 1928, v. pag. 282.

(6) H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration etc.*, Paris 1904, v. pag. 124.

β) Per quasi ogni punto (x_0, y_0) del quadrato $(0, 2\pi; 0, 2\pi)$ si abbia

$$\lim_{\substack{\alpha \\ \beta} \Big\} \to 0} \frac{1}{4\alpha\beta} \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} \int_{y_0-\beta}^{y_0+\beta} V_z(x, y)\, dx\, dy = V_z(x_0, y_0),$$

e analoghe relazioni scambiando fra loro x, y, z.

3. – Le funzioni $V_z(x, y)$, $V_x(y, z)$, $V_y(x, z)$ sono funzioni di due variabili, e quindi per esse non vale senza restrizioni [7] il fondamentale teorema di LEBESGUE. Anzi S. SAKS [8] ha dimostrato che esiste una funzione $\varphi(x, y)$, quasi continua, non negativa e integrabile nel quadrato $(0, 2\pi; 0, 2\pi)$, tale che in tutti i punti di questo quadrato si ha

$$\overline{\lim_{\substack{\alpha \\ \beta} \Big\} \to 0}} \frac{1}{4\alpha\beta} \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} \int_{y_0-\beta}^{y_0+\beta} \varphi(x, y)\, dx\, dy = +\infty.$$

Si potrebbe pensare che i legami che intercedono fra le funzioni $V_z(x, y)$, $V_x(y, z)$, $V_y(x, z)$ e la funzione $f(x, y, z)$ siano tali da impedire, per le prime tre funzioni, il presentarsi dell'anomalia messa in luce da S. SAKS per le funzioni $\varphi(x, y)$ soltanto quasi continue e integrabili; e che addirittura possa esser dimostrato che valgono quasi ovunque le condizioni α) e β) di cui al n. 2. Ma ciò non è, neppure per le funzioni $f(x, y, z)$ continue nel cubo chiuso C, come dimostrerò nel presente lavoro.

---

(7) Se $g(x, y)$ è una funzione definita nel quadrato fondamentale $Q \equiv (0, 2\pi; 0, 2\pi)$, quasi continua e integrabile L, allora si ha quasi ovunque in Q che:

$$\lim_{\substack{\alpha \\ \beta} \Big\} \to 0} \frac{1}{4\alpha\beta} \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} \int_{y_0-\beta}^{y_0+\beta} g(x, y)\, dx\, dy = g(x_0, y_0)$$

sotto una delle seguenti ipotesi: *a*) che g sia integrabile con una potenza g^p $(p > 1)$; *b*) che sia integrabile con $g \log |g|$; *c*) che nel passaggio al limite sovra indicato si imponga la restrizione che per una opportuna costante $m > 1$ si abbia $1/m < \alpha/\beta < m$; *d*) che sia $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$, con $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ funzioni non decrescenti del parametro t, positive per $t > 0$, tendenti a 0 per $t \to 0$, indipendenti da (x_0, y_0). Cfr., per la condizione *a*), A. ZYGMUND, *On the differentiability of multiple integral*, Fund. Math., **23** (1934), v. p. 144; per le condiz. *b*) e *d*), B. JESSEN, J. MARCINKIEWICZ, A. ZYGMUND, *Note on the differentiability of multiple integrals*, Fund. Math., **25** (1935), v. p. 222 e p. 224 rispettivamente; per la condiz. *c*), H. LEBESGUE, *Sur l'intégration des fonctions discontinues*, Annales École Norm. Sup., **27** (1910), v. p. 387 e segg..

(8) S. SAKS, *Remark on the differentiability of the* LEBESGUE'*s indefinite integral*, Fund. Math., **22**, 256-261 (1934).

Dimostrerò infatti le seguenti proposizioni:

I. – *Esiste una funzione $g(x, y, z)$ definita in tutti i punti del cubo fondamentale C, quasi continua, integrabile L, a variazione limitata secondo* TONELLI, *e tale che la sua variazione $V_z(x, y)$, per ogni (x_0, y_0, z_0) di C e ogni $\lambda > 0$ $(0 \leqslant z_0 < z_0 + \lambda \leqslant 2\pi)$ verifica la relazione*

$$(1) \qquad \overline{\lim_{\substack{\alpha \\ \beta} \Big\}\to 0}} \frac{1}{4\alpha\beta} \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} \int_{y_0-\beta}^{y_0+\beta} \{ V_z(x, y, z_0 + \lambda) - V_z(x, y, z_0) \} \, dx \, dy = + \infty .$$

II. – *Esiste una funzione $F(x, y, z)$ continua nel cubo chiuso C, a variazione limitata secondo* TONELLI *e tale che le sue variazioni totali $V_x(y, z)$, $V_y(x, z)$, $V_z(x, y)$ sono ovunque finite, le $V_x(y, z)$ e $V_y(x, z)$ sono limitate, e la variazione $V_z(x, y)$ verifica, per ogni (x_0, y_0) del quadrato fondamentale Q, la relazione*

$$\overline{\lim_{\substack{\alpha \\ \beta} \Big\}\to 0}} \frac{1}{4\alpha\beta} \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} \int_{y_0-\beta}^{y_0+\beta} V_z(x, y) \, dx \, dy = + \infty .$$

III. – *Esiste una funzione $G(x, y, z)$ continua nel cubo chiuso C, a variazione limitata secondo* TONELLI, *e tale che le sue sue variazioni totali $V_x(y, z)$, $V_y(x, z)$, $V(x, y)$, sono ovunque finite, la $V_x(y, z)$ e la $V_y(x, z)$ sono limitate, e la $V_z(x, y)$, per ogni (x_0, y_0, z_0) di C e per ogni $\lambda > 0$ $(0 \leqslant z_0 < z_0 + \lambda \leqslant 1)$ verifica la* (1) (⁹).

Darò esempi effettivi delle funzioni g, F, G. Mostrerò inoltre che è lecito imporre a tali funzioni l'ulteriore condizione di essere nulle sulla frontiera di C, e perciò prolungabili in tutto lo spazio mediante la periodicità di periodo 2π (¹⁰).

Ai risultati anzidetti giungo per gradi (§ 2), mediante varie nuove costruzioni che si appoggiano in parte su quella ben nota di S. SAKS.

Nel § 1 riporto con alcune precisazioni la costruzione di SAKS. Nel § 2 dimostro le proposizioni I, II, III.

(⁹) Ne segue immediatamente che si può anche supporre che due delle tre funzioni dette verifichino la (1), e l'altra sia limitata, oppure che tutte e tre verifichino la (1). Basta allo scopo considerare al posto della funzione $G(x, y, z)$ la funzione $G(x, y, z) + G(z, x, y)$, oppure, rispettivamente, la $G(x, y, z) + G(z, x, y) + G(y, z, x)$. Analoga osservazione vale per le proposizioni precedenti.

(¹⁰) Nel seguito supporrò, per semplicità di esposizione, che il cubo fondamentale C sia addirittura il cubo $C \equiv (0, 1; 0, 1; 0, 1)$; così il quadrato Q sarà il quadrato $Q \equiv (0, 1; 0, 1)$.

§ 1. - Le funzioni S.

1. - La costruzione di H. Bohr [11]. Richiamerò qui con qualche precisazione la nota costruzione di H. BOHR. Essa mi permetterà di dimostrare il seguente

Lemma I. *Sia l'intervallo* $I \equiv (a \leqslant x \leqslant a+h;\ b \leqslant y \leqslant b+k)$, *e sia* $\eta > 0$ *un numero arbitrario. È possibile suddividere* I *in un numero finito di intervalli (in parte sovrapponentisi)*

$$I_1^{(1)},\ I_2^{(1)}, \dots, I_M^{(1)};\quad I_1^{(2)},\ I_2^{(2)}, \dots, I_M^{(2)};\quad \dots;\quad I_1^{(q)},\ I_2^{(q)}, \dots, I_M^{(q)};\quad J_1, J_2, \dots, J_r$$

tali che, posto

$$V^{(i)} = \sum_{p=1}^{M} I_p^{(i)}, \qquad E^{(i)} = \prod_{p=1}^{M} I_p^{(i)}, \qquad (i=1, 2, \dots, q),$$

si abbia:

$$|E^{(i)}| > 0, \quad i=1, 2, \dots, q; \qquad |V^{(i)}V^{(j)}| = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, q;$$

$$|V^{(i)}J_s| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad s = 1, 2, \dots, r;$$

$$|J_s J_t| = 0, \quad s \neq t, \quad s,\ t = 1, 2, \dots, r;$$

$$|I_1^{(i)}| = |I_2^{(i)}| = \dots = |I_M^{(i)}| < \eta\, |V^{(i)}|, \qquad i = 1, 2, \dots, q;$$

$$\sum_{s=1}^{r} |J_s| < \eta\, |I|, \quad \sum_{i=1}^{q} |E^{(i)}| < \eta\, |I|.$$

Sia M il più piccolo intero tale che

$$H(M) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{M} > \frac{1}{\eta}$$

e conseguentemente sia ν il più piccolo intero tale che, posto $H(M)/M = 1 - \vartheta$, $0 < \vartheta < 1$, si abbia $\vartheta^\nu < \eta$. Siano $I_p^{(1)}$ gli intervalli

$$I_p^{(1)} \equiv \left(a < x < a + \frac{ph}{M}, \quad b < y < b + \frac{k}{p}\right), \quad p = 1, 2, \dots, M.$$

---

[11] C. CARATHEODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, 2.te Aufl., Leipzig 1927, v. pp. 689-691.

Manifestamente $|I_p^{(1)}| = (kh)/M$, $p = 1, 2, \ldots, M$, e inoltre

$$|V^{(1)}| = \frac{hk}{M}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{M}\right) = \frac{hk}{M} H(M) > \frac{1}{\eta} |I_p^{(1)}|, \qquad p = 1, 2, \ldots, M,$$

$$(2) \qquad |E^{(1)}| = \frac{hk}{M^2} = \frac{1}{MH(M)} |V^{(1)}|.$$

Infine

$$(3) \qquad |V^{(1)}| = \frac{hk}{M} H(M) = (1 - \vartheta)|I|, \qquad |I - V^{(1)}| = \vartheta |I|.$$

Diremo che $V^{(1)}$ è un *insieme a scala* relativo all'intervallo I. Conducendo per i vertici degli intervalli $I_p^{(1)}$ le parallele all'asse y, il complementare $I - V^{(1)}$ di $V^{(1)}$ in I risulta diviso in $M - 1$ intervalli. Applichiamo a ciascuno di questi la costruzione che precedentemente abbiamo applicato ad I mantenendo inalterato il numero M. Si otterrano $M - 1$ insiemi a scala $V^{(2)}, V^{(3)}, \ldots, V^{(M)}$, privi a due a due e con $V^{(1)}$ di punti interni a comune. Inoltre dalla seconda delle (3) si deduce

$$|I - (V^{(1)} + V^{(2)} + \ldots + V^{(M)})| = \vartheta\, |I - V^{(1)}| = \vartheta^2 |I|.$$

Iteriamo il procedimento indicato ν volte. Si otterranno

$$q = 1 + (M - 1) + (M - 1)^2 + \ldots + (M - 1)^{\nu - 1}$$

insiemi a scala e l'insieme residuo risulterà scomposto in $r = (M - 1)^\nu$ intervalli, a due a due senza punti interni a comune, che indicheremo con $J_1, J_2, \ldots, J_r$. La somma di questi intervalli avrà misura uguale a $\vartheta^\nu |I| < \eta |I|$. Si osservi ora che

$$|E^{(i)}| = \frac{1}{MH(M)} |V^{(i)}|, \qquad i = 1, 2, \ldots, q$$

e quindi, essendo gli insiemi $V^{(i)}$ a due a due senza punti interni a comune, e ricordando la (2), si trova

$$\sum_{i=1}^{q} |E^{(i)}| < \frac{1}{MH(M)} \sum_{i=1}^{q} |V^{(i)}| < \frac{1}{MH(M)} |I| < \frac{1}{M} \eta |I| < \eta |I|.$$

Risulta così completamente dimostrato il teorema.

Indicando con n il numero globale degli intervalli $E^{(i)}$, J_s ($i = 1, 2, \ldots, q$; $s = 1, 2, \ldots, r$), ossia il numero $q + r$, risulta

$$n = (1 + (M - 1) + (M - 1)^2 + \ldots + (M - 1)^{\nu - 1}) + (M - 1)^\nu = \frac{(M - 1)^{\nu + 1} - 1}{M - 2}.$$

Rileviamo ancora che gli intervalli $E^{(i)}$ e J_s, pur non avendo punti interni a comune, possono avere a comune punti del contorno.

2. – La costruzione di S. Saks. Richiamerò qui, pure con qualche precisazione, la nota costruzione di S. Saks. Essa mi permetterà di dimostrare il seguente

Lemma II. *Per ogni intero N esiste una funzione quasi continua, limitata, non negativa $\Phi_N(x, y)$, definita in tutti i punti del quadrato $Q \equiv (0, 1; 0, 1)$, tale che*

a) si ha

$$\iint_Q \Phi_N(x, y)\, dx\, dy < 2^{1-N} ; \tag{4}$$

b) ad ogni punto (x_0, y_0) di Q corrisponde un intervallo $I_0 \equiv (x_0 - h,\ x_0 + h;\ y_0 - k,\ y_0 + k)$ avente le seguenti proprietà:

$$\delta(I_0) < \frac{4}{N}, \qquad \iint_{I_0} \Phi_N(x, y)\, dx\, dy > \frac{1}{4} N \, | I_0 | . \tag{5}$$

Si divida il quadrato Q in N^2 quadrati uguali mediante parallele ai lati, e siano $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{N^2}$ i quadrati così ottenuti, ciascuno di diametro $< 2/N$. Posto

$$\eta = \frac{1}{N 2^N},$$

si operi su ciascuno dei quadrati Q_j, $j = 1, 2, \ldots, N^2$, la suddivisione indicata nel Lemma I. Ogni Q_j, $j = 1, 2, \ldots, N^2$, risulterà diviso in un numero finito di intervalli

$$I_{j1}^{(1)}, I_{j2}^{(2)}, \ldots, I_{jM}^{(1)}; \quad I_{j1}^{(2)}, I_{j2}^{(2)}, \ldots, I_{jM}^{(2)}; \quad \ldots; \quad I_{j1}^{(q)}, I_{j2}^{(q)}, \ldots, I_{jM}^{(q)}; \quad J_{j1}, J_{j2}, \ldots, J_{jr}$$

tali che, posto

$$V_j^{(i)} = \sum_{n=1}^{M} I_{jn}^{(i)}, \qquad E_j^{(i)} = \prod_{n=1}^{M} I_{jn},$$

si ha

$$| E_j^{(i)} | > 0; \quad i = 1, 2, \ldots, q; \quad j = 1, 2, \ldots, N^2;$$

$$| V_j^{(i)} V_{j'}^{(i')} | = 0; \quad j \neq j', \text{ oppure } j = j', i \neq i'; \ i, i' = 1, 2, \ldots, q; \ j, j' = 1, 2, \ldots, N^2;$$

$$| J_{js} J_{j's'} | = 0; \quad j \neq j', \text{ oppure } j = j', \ s \neq s'; \ s, s' = 1, 2, \ldots, r; \ j, j' = 1, 2, \ldots, N^2;$$

$$| V_j^{(i)} J_{j's} | = 0; \quad i = 1, 2, \ldots, q; \quad s = 1, 2, \ldots, r; \quad j, j' = 1, 2, \ldots, N^2;$$

$$| I_{j1}^{(i)} | = | I_{j2}^{(i)} | = \ldots = | I_{jM}^{(i)} | < \frac{1}{N 2^N} | V_j^{(i)} |; \quad i = 1, 2, \ldots, q; \ j = 1, 2, \ldots, N^2; \tag{6}$$

$$\sum_{s=1}^{r} | J_{js} | < \frac{1}{N 2^N} | Q_j |, \qquad \sum_{i=1}^{q} | E_j^{(i)} | < \frac{1}{N 2^N} | Q_j | ; \quad j = 1, 2, \ldots, N^2 .$$

Posto

$$J_N = \sum_{j=1}^{N^2} \sum_{s=1}^{r} J_{js}, \qquad E_N = \sum_{j=1}^{N^2} \sum_{i=1}^{q} E_j^{(i)},$$

si ha

$$(7) \qquad |J_N| < \frac{1}{N2^N}, \qquad |E_N| < \frac{1}{N2^N}.$$

Definiamo ora la funzione $\Phi_N(x, y)$ come segue:

$$\Phi_N(x, y) = \begin{cases} |V_j^{(i)}| / (2^N |E_j^{(i)}|) & \text{se } (x, y) \text{ è interno a } E_j^{(i)}, \\ & \quad j = 1, 2, \ldots, N^2;\ i = 1, 2, \ldots, q; \\ N & \text{se } (x, y) \text{ è interno a } J_{js}, \\ & \quad j = 1, 2, \ldots, N^2;\ s = 1, 2, \ldots, r; \\ 0 & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

Ne segue

$$\iint_Q \Phi_N(x, y)\, dx\, dy = \frac{1}{2^N} \sum_{j=1}^{N^2} \sum_{i=1}^{q} |V_j^{(i)}| + N \sum_{j=1}^{N^2} \sum_{s=1}^{r} |J_{js}| < \frac{1}{2^N} + N \frac{1}{N2^N} = \frac{2}{2^N}.$$

Sia (x_0, y_0) un punto interno o sul contorno di un intervallo $I_{j_0, l_0}^{(i_0)}$, e I_0 indichi il più piccolo intervallo contenente $I_{j_0, l_0}^{(i_0)}$ con centro in (x_0, y_0). L'intervallo $I_{j_0, l_0}^{(i_0)}$ ha diametro $< 2/N$ essendo completamente contenuto nel quadrato Q_j. Ne segue che I_0 ha diametro $< 4/N$. Ricordando la (6) e il fatto che $\Phi_N(x, y)$ è non negativa, si trova

$$\iint_{I_0} \Phi_N(x, y)\, dx\, dy \geqslant \iint_{I_{j_0, l_0}^{(i_0)}} \Phi_N(x, y)\, dx\, dy = \frac{1}{2^N} |V_{j_0, l_0}^{(i_0)}| > N |I_{j_0, l_0}^{(i_0)}| > \frac{N}{4} |I_0|,$$

da cui segue la (5). Analogo ragionamento se (x_0, y_0) è un punto interno o sul contorno di un intervallo $J_{j_0 s_0}$.

Il ragionamento precedente non perde la sua validità se l'intervallo I_0 viene a contenere punti esterni al quadrato Q, ove la funzione $\Phi_N(x, y)$ venga definita anche fuori di Q, ad esempio mediante la periodicità di periodo 1 rispetto ad x e rispetto ad y, oppure ponendo $\Phi_N(x, y) = 0$ in tutti i punti fuori di Q.

3. – Dimostriamo il seguente

Lemma III. *Per ogni intero N esiste una funzione $\overline{\Phi}_N(x, y)$, continua, nel quadrato chiuso $Q \equiv (0, 1; 0, 1)$, nulla sulla frontiera di Q e tale che*

$$a) \qquad \iint_Q \overline{\Phi}_N(x, y)\, dx\, dy < 2^{1-N},$$

b) ad ogni punto (x_0, y_0) di Q corrisponde un intervallo $I_0 \equiv (x_0 - h, x_0 + h; y_0 - k, y_0 + k)$ avente le seguenti proprietà:

$$\delta(I_0) < \frac{4}{N},$$

$$\iint_{I_0} \overline{\Phi}_N(x, y)\, dx\, dy > \frac{1}{16} N \mid I_0 \mid . \tag{8}$$

Procediamo come per il Lemma II. Per ogni rettangolo $E_j^{(i)}$, $(i=1, 2,..., q;\ j = 1, 2,..., N^2)$, diciamo $M_j^{(i)}$ il centro di $E_j^{(i)}$, e $\overline{E}_j^{(i)}$ il rettangolo concentrico ad $E_j^{(i)}$ e di lati metà di quelli di $E_j^{(i)}$. In modo analogo definiamo i rettangoli $\overline{J}_{js}$, $(s = 1, 2,..., r;\ j = 1, 2,..., N^2)$. Definiamo ora come segue la funzione $\overline{\Phi}_N(x, y)$ in tutti i punti di Q. Sia $\overline{\Phi}_N(x, y) = \mid V_j^{(i)} \mid / (2^N \mid E_j^{(i)} \mid)$ in tutti i punti interni e sul contorno di $\overline{E}_j^{(i)}$, $(i=1, 2,..., q;\ j=1, 2,..., N^2)$. Sia $\overline{\Phi}_N(x, y) = N$ in tutti i punti interni e sul contorno dei rettangoli $\overline{J}_{js}$, $(s=1, 2,..., r;\ j=1, 2,..., N^2)$. Sia $\overline{\Phi}_N(x, y) = 0$ in tutti i punti esterni o sul contorno dei rettangoli $E_j^{(i)}$ e J_{js}. Infine nelle corone $E_j^{(i)} - \overline{E}_j^{(i)} \overline{\Phi}_N(x, y)$ vari linearmente su ogni semiretta uscente da $M_j^{(i)}$ fra i valori che la funzione stessa assume sul contorno di $\overline{E}_j^{(i)}$ e su quello di $E_j^{(i)}$. Analogamente definiamo la funzione $\overline{\Phi}_N(x, y)$ nei punti delle corone $J_{js} - \overline{J}_{js}$. La funzione $\overline{\Phi}_N(x, y)$ così definita in tutto il quadrato Q è continua e non negativa in Q e nulla sul contorno di Q. Inoltre $0 \leqslant \overline{\Phi}_N(x, y) \leqslant \Phi_N(x, y)$, e quindi dalla (4) segue

$$\iint_Q \overline{\Phi}_N(x, y) dx\, dy < 2^{1-N}.$$

Infine, procedendo come nel Lemma II, se (x_0, y_0) è un punto di Q appartenente a un rettangolo di $I_{j_0, l_0}^{(i_0)}$ e I_0 è il relativo rettangolo di centro (x_0, y_0), si ha:

$$\iint_{I_0} \overline{\Phi}_N(x, y)\, dx\, dy \geqslant \iint_{I_{j_0,l_0}^{(i_0)}} \Phi(x, y)\, dx\, dy > \frac{1}{2^N} \frac{\mid \overline{E}_{j_0}^{(i_0)} \mid}{\mid E_{j_0}^{(i_0)} \mid} \mid V_{j_0, l_0}^{(i_0)} \mid > \frac{1}{4} N \mid I_{j_0, l_0}^{(i_0)} \mid > \frac{N}{16} \mid I_0 \mid,$$

da cui segue la (8).

Anche qui il ragionamento fatto non perde la sua validità ove accada che l'intervallo I_0 venga a contenere punti esterni al quadrato Q, potendosi anche qui definire la funzione $\overline{\Phi}_N(x, y)$ anche fuori di Q mediante la periodicità di periodo 1 rispetto ad x e rispetto ad y, oppure ponendo $\overline{\Phi}_N(x, y)=0$ in tutti i punti fuori di Q, tale funzione risultando in entrambi i casi continua in tutto il piano.

Il Lemma III è così dimostrato.

4. – Osservazione. Le serie

$$\sum_{N=1}^{\infty} \Phi_N(x, y)\,, \qquad \sum_{N=1}^{\infty} \overline{\Phi}_N(x, y) \tag{9}$$

convergono quasi ovunque in Q, come si può dimostrare elementarmente.

Diciamo infatti T_N, $(N=1, 2,..)$, e T gli insiemi

$$T_N = \sum_{n=N}^{\infty} E_n + \sum_{n=N}^{\infty} J_n\,, \quad (N=1, 2,...), \qquad T_N > T_{N+1}\,, \qquad T = \lim_{N\to\infty} T_N\,.$$

Ricordando le (7) si trova

$$|T_N| \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n2^n} + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^{N-2}}\,, \qquad N=1, 2,...; \qquad |T|=0\,.$$

Dimostriamo che le serie (9) convergono in tutti i punti (x, y) di Q fuori di T. Sia (x_0, y_0) un punto di Q fuori di T. Allora esiste un intero N_0 tale che, per ogni $N \geqslant N_0$, (x_0, y_0) è fuori degli insiemi T_N e quindi fuori degli insiemi E_n e J_n con $n \geqslant N_0$. Ne segue, per ogni $N \geqslant N_0$,

$$\sum_{n=1}^{N} \Phi_n(x, y) = \sum_{n=1}^{N_0} \Phi_n(x, y)\,, \qquad \sum_{n=1}^{N} \overline{\Phi}_n(x, y) = \sum_{n=1}^{N_0} \overline{\Phi}_n(x, y)\,,$$

e quindi le serie (9) convergono nel punto (x_0, y_0).

5. – Dimostriamo infine il seguente

Teorema di SAKS [12]. *Esiste una funzione $\varphi(x, y)$, non negativa e integrabile L nel quadrato Q, tale che per ogni punto (x_0, y_0) interno a Q è data una successione $I_1, I_2,..., I_N,...$ di intervalli di centro (x_0, y_0) tali che*

$$\lim_{N\to\infty} \delta(I_N) = 0\,, \qquad \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{|I_N|} \iint_{I_N} \varphi(x, y)\, dx\, dy = +\infty.$$

---

[12] S. SAKS, loc. cit. in [9].

Siano $\Phi_N(x, y)$, $(N = 1, 2, \ldots)$ le funzioni definite nel Lemma II. Poniamo ([13])

$$\varphi(x, y) = \sum_{N=1}^{\infty} \Phi_N(x, y)$$

in tutti i punti (x, y) di Q nei quali questa serie converge, e $\varphi(x, y) = 0$ nei rimanenti punti. La funzione $\varphi(x, y)$ è così definita in tutti i punti di Q, ovunque finita, nulla sul contorno di Q, e data dalla (10) in quasi tutti i punti di Q.

L'osservazione di cui al n. 4 prova in modo diretto che la serie a secondo membro della (10) converge quasi ovunque ad una funzione che risulta quasi continua. Ma ciò può provarsi anche in altro modo. Infatti, posto

$$\varphi_n(x, y) = \sum_{N=1}^{n} \Phi_N(x, y) ,$$

si ha

$$\iint_Q \varphi_n(x, y)\, dx\, dy = \sum_{N=1}^{n} \iint_Q \Phi_N(x, y)\, dx\, dy < \sum_{N=1}^{n} \frac{2}{2^N} < 2 ,$$

e la successione delle $\varphi_n(x, y)$ si presenta come una successione non decrescente di funzioni non negative i cui integrali sono superiormente limitati; tale successione converge quasi dappertutto, infatti in caso contrario vi sarebbe un insieme μ di misura positiva, tale che in tutti i suoi punti, per n maggiore di un conveniente n_0, sarebbe $\varphi_n > 2 / |\mu|$, e quindi

$$\iint_Q \varphi_n(x, y)\, dx\, dy \geqslant \iint_\mu \varphi_n(x, y)\, dx\, dy > 2 .$$

La serie a secondo membro della (10) soddisfa dunque le condizioni di integrabilità del teorema di LEVI ([14]), e si ha:

$$\iint_Q \varphi_n(x, y)\, dx\, dy = \sum_{N=1}^{n} \iint_Q \Phi_N(x, y)\, dx\, dy \leqslant 2 .$$

([13]) Cfr., per questa posizione, L. CESARI, *Sul teorema di densità in senso forte*, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, (2) **8**, 301-307 (1939).

([14]) B. LEVI, *Sopra l'integrazione per serie*, Rend. Ist. Lomb., **39** (1906), cfr. p. 775; e altresì: L. TONELLI, *Sulla nozione di integrale*, Annali Mat., (4) **1** (1924), cfr. p. 134.

Per ogni N si associ allora al punto (x_0, y_0) l'intervallo I_0 definito al Lemma II, e lo si chiami I_N; si ha:

$$\iint_{I_N} \varphi(x, y)\, dx\, dy > \iint_{I_N} \Phi_N(x, y)\, dx\, dy > \frac{N}{4} \mid I_N \mid ,$$

onde la tesi.

6. – Definizione. « Chiameremo *funzione* S ogni funzione che pre-« senti l'anomalia di SAKS, ossia ogni funzione $f(x, y)$ quasi continua, non « negativa, integrabile L, definita in tutto il quadrato fondamentale Q, tale « che per ogni punto (x_0, y_0) di Q si abbia

$$\overline{\lim_{\substack{\alpha \\ \beta}\Big\}\to 0}} \frac{1}{4\alpha\beta} \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} \int_{y_0-\beta}^{y_0+\beta} f(x, y)\, dx\, dy = +\infty \text{ ».}$$

7. – Dalla definizione discende immediatamente:

a) Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione $f(x, y)$, definita in tutto il quadrato fondamentale Q, quasi continua, non negativa e integrabile L, sia una funzione S, è che per ogni punto (x_0, y_0) interno a Q esista una successione $I_1, I_2, \dots, I_N, \dots$ di intervalli contenenti il punto (x_0, y_0) come centro, per cui si abbia

$$\lim_{N\to\infty} \delta(I_N) = 0 , \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\mid I_N \mid} \iint_{I_N} f(x, y)\, dx\, dy = +\infty .$$

b) Condizione sufficiente affinchè una funzione $f(x, y)$ definita in tutto il quadrato fondamentale Q, quasi continua, non negativa e integrabile L sia una funzione S, è che per ogni punto (x_0, y_0) interno a Q esista una costante $k > 0$ e una successione $I_1, I_2, \dots, I_N, \dots$ di intervalli contenenti il numero (x_0, y_0) come centro, per cui si abbia

$$\lim_{N\to\infty} \delta(I_N) = 0 , \qquad \iint_{I_N} f(x, y)\, dx\, dy > kN \mid I_N \mid .$$

8. – Sulla base delle osservazioni superiori si dimostrano immediatamente i seguenti corollari:

a) La funzione $\varphi(x, y)$ definita al precedente n. 5 è una funzione S.

b) Siano $\overline{\Phi}_N(x, y)$ le funzioni continue nel quadrato chiuso Q definite nel Lemma III. Posto

$$\overline{\varphi}(x, y) = \sum_{N=1}^{\infty} \overline{\Phi}_N(x, y)$$

in tutti i punti (x, y) di Q nei quali questa serie converge, e $\overline{\varphi}(x, y) = 0$ nei punti rimanenti, la funzione $\overline{\varphi}(x, y)$ è una funzione S.

c) Se $f(x, y)$ è una funzione S, e c è una costante positiva, anche le funzioni $c + f$, cf sono funzioni S.

d) La somma di una funzione S e di una funzione quasi continua non negativa integrabile L è una funzione S.

e) Ogni funzione quasi continua, tale che in quasi ogni punto sia compresa fra due funzioni S, è una funzione S.

f) Il prodotto di una funzione S per una funzione positiva continua in tutto Q è ancora una funzione S.

g) Per ogni n, il resto n-esimo della serie definita alla lett. *b*) è ancora una funzione S.

§ 2. – Le funzioni a variazione limitata le cui variazioni totali sono funzioni S.

9. – Teorema I. *Esiste una funzione $g(x, y, z)$ definita in tutti i punti del cubo fondamentale $C \equiv (0, 1; 0, 1; 0, 1)$, quasi continua, integrabile L, a variazione limitata secondo* TONELLI, *e tale che, per ogni z_0 ed ogni $\lambda > 0$ $(0 \leq z_0 < z_0 + \lambda \leq 1)$ la variazione $V(x, y, z_0 + \lambda) - V_z(x, y, z_0)$ è una funzione S.*

Occorre notare avanti che se $V_z(x, y)$ è la variazione di una funzione $f(x, y, z)$, la variazione della funzione f/m ($m =$ costante), calcolata sul medesimo intervallo, sarà V/m, e che (n. 8, *c*)) se la variazione della $f(x, y, z)$ è una funzione S, tale risulterà anche la variazione della funzione f/m.

Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(x, y)}{2^n}, \tag{11}$$

dove $\varphi(x, y)$ è la funzione definita al n. 5. Per il corollario sovra citato ogni addendo di tale serie è una funzione S, come pure la somma della serie stessa che coincide evidentemente con $\varphi(x, y)$. Ma per il corollario *d*) dello stesso n. è una funzione S anche la somma di un numero qualunque di suoi termini, e per il corollario *e*) anche la somma di una qualunque serie estratta dalla (11): infatti una tale serie converge dappertutto perchè a termini positivi e maggiorata dalla (11) che converge dappertutto; inoltre la sua somma è maggiore di uno qualsiasi dei suoi addendi, che è una funzione S, e minore della somma della (11), che è pure una funzione S.

Si segnino quindi sul segmento $(0, 1)$ dell'asse z i punti a quote razionali, e si conducano per essi i piani paralleli al piano (x, y): numerati tali piani in uno qualunque dei noti modi, si dia alla g sul piano n-esimo il valore del termine n-esimo della (11): nei punti non appartenenti a tali piani sia $g = 0$.

La funzione $g(x, y, z)$ risulta così definita in tutto il cubo $C \equiv (0, 1; 0, 1; 0, 1)$ chiuso, e soddisfa alle condizioni richieste: infatti è quasi continua in C ed indi integrabile L, essendo diversa da zero nei punti di un insieme di misura tridimensionale nulla. Le sue variazioni totali $V_x(y, z)$ e $V_y(x, z)$ sono anch'esse quasi ovunque finite, quasi continue e integrabili L perchè diverse da zero in un insieme di misura superficiale nulla. La variazione secondo l'asse z calcolata sull'intero segmento $(0, 1)$ o su un segmento in esso contenuto $(z_0, z_0 + \lambda)$ è una funzione S perchè equivale al doppio della somma della (11) o di una serie estratta da essa.

O s s e r v a z i o n e. La funzione $g(x, y, z)$ così costruita costituisce già un esempio di funzione di tre variabili che non verifica le condizioni del teorema A; si osserverà tuttavia che se, ai sensi di quanto detto in nota (³); si stabilisce di trascurare, nel calcolo delle variazioni totali della funzione $g(x, y, z)$, i valori che questa funzione assume in un opportuno insieme E di punti di C di misura tridimensionale nulla, allora si può scegliere E in modo che risulti $V_x(y, z) = V_y(x, z) = V_z(x, y) = 0$. Ciò non accadrà per le funzioni che costruiremo in seguito.

10. – Lemma IV. *Se $f_n(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ (a, b finiti), $n = 1, 2, \ldots$, è una successione di funzioni continue in (a, b) e convergenti verso una funzione $f(x)$, allora, indicate con V, V_n, $n = 1, 2, \ldots$, le variazioni totali delle funzioni $f(x)$, $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, in (a, b), si ha*

$$V \leqslant \varliminf_{n \to \infty} V_n \,. \tag{12}$$

Sia $\varepsilon > 0$ un numero arbitrario e siano $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b$ $m + 1$ punti tali che

$$\sum_{i=0}^{m-1} | f(x_{i+1}) - f(x_i) | \geqslant \begin{cases} V - \varepsilon & \text{se } V < +\infty \,, \\ 1/\varepsilon & \text{se } V = +\infty \,. \end{cases}$$

Per la convergenza della successione $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, in tutti i punti di (a, b), esiste un intero n_0 tale che per ogni $n \geqslant n_0$, si ha $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon/2m$, $(i = 0, 1, 2, \ldots, m)$. Per ogni $n \geqslant n_0$ si ha altresì

$$\left.\begin{matrix} V - \varepsilon \\ 1/\varepsilon \end{matrix}\right\} \leqslant \sum_{i=0}^{m-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leqslant \sum_{i=0}^{m-1} |f_n(x_{i+1}) - f_n(x_i)| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - f_n(x_i)| + \sum_{i=0}^{m-1} |f(x_i) - f_n(x_i)| < V_n + \varepsilon ,$$

e quindi

$$\left.\begin{matrix} V - \varepsilon \\ 1/\varepsilon \end{matrix}\right\} \leqslant \underline{\lim}_{n \to \infty} V_n + \varepsilon .$$

Dall'arbitrarietà di ε segue senz'altro l'asserto.

11. – Lemma V. *Nelle condizioni del Lemma IV, se per ogni intero n esistono $k_n + 1$ numeri reali*

$$a = x_{n,0} < x_{n,1} < x_{n,2} < \ldots < x_{n,k_n} = b$$

tali che in ciascuno degli intervalli $(x_{n,t}, x_{n,t+1})$, $t = 0, 1, \ldots, k_n - 1$, la funzione $f_n(x)$ è monotona; se inoltre per ogni coppia di interi n, p, $(n \geqslant 1, p \geqslant 1)$, si ha

$$f_{n+p}(x_{n,t}) = f_n(x_{n,t}); \qquad t = 0, 1, \ldots, k_n; \quad p = 1, 2, \ldots; \quad n = 1, 2, \ldots,$$

allora esiste, finito o infinito, il limite seguente, e si ha

$$V = \lim_{n \to \infty} V_n .$$

Per ogni $p \geqslant 1$ si ha $f_{n+p}(x_{n,t}) = f_n(x_{n,t})$, e quindi anche $f(x_{n,t}) = f_n(x_{n,t})$, $t = 0, 1, \ldots, k_n$; $n = 1, 2, \ldots$. D'altra parte si ha per ogni n

$$V_n = \sum_{t=0}^{k_n - 1} |f_n(x_{n,t}) - f_n(x_{n,t+1})| = \sum_{t=0}^{k_n - 1} |f(x_{n,t}) - f(x_{n,t+1})| \leqslant V ,$$

e quindi

$$\overline{\lim}_{n \to \infty} V_n \leqslant V .$$

Dal confronto di questa con la (12) segue l'esistenza del $\lim_{n \to \infty} V_n$ e l'uguaglianza asserita.

12. – Teorema II. *Esiste una funzione $F(x, y, z)$, non negativa, continua nel cubo chiuso $C \equiv (0, 1; 0, 1; 0, 1)$, nulla sulla frontiera di C, a variazione limitata secondo* TONELLI, *e tale che le sue variazioni totali sono ovunque finite, le variazioni totali $V_x(y, z)$, $V_y(x, z)$ sono limitate, e la variazione totale $V_z(x, y)$ è una funzione S.*

Osserviamo anzitutto che la funzione $\overline{\Phi}_n(x, y)$ definita nel Lemma III è continua e non negativa nel quadrato chiuso Q, e quindi ammette un massimo M_n. Inoltre $\overline{\Phi}_n(x, y)$ è nulla sulla frontiera di Q. Ricordando la costruzione della funzione $\overline{\Phi}_n(x, y)$ risulta che su ogni segmento $x = \bar{x}$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, e $y = \bar{y}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, la funzione $\overline{\Phi}_n(x, y)$ è costante su un numero finito m_n di intervalli, sui quali essa assume valori compresi fra 0 e M_n (estremi inclusi), e ciascuno dei rimanenti intervalli in cui rimane diviso il segmento considerato, può essere diviso in due parti su ciascuna delle quali $\overline{\Phi}_n(x, y)$ varia linearmente fra il valore 0 e quello assunto nell'altro estremo. Ne segue che se indichiamo con m_n il numero massimo di intervalli nei quali può in tal modo venir diviso ogni segmento $x = \bar{x}$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ e $y = \bar{y}$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, la funzione continua $\overline{\Phi}_n(x, y)$ ha su ciascuno di detti segmenti una variazione totale $< 2m_n M_n$. Diciamo p_n il più piccolo intero pari per cui sia

$$\frac{2m_n M_n}{p_n} < \frac{1}{n+1}.$$

Poniamo

$$\zeta_{n,t} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{t}{n(n+1)p_n}, \qquad n = 1, 2, \ldots; \; t = 0, 1, \ldots, p_n .$$

Ne risulta intanto $\zeta_{n,p_n} = \zeta_{n+1,0} = 1 - 1/(n+1)$. Definiamo ora in tutti i punti di C la funzione $F(x, y, z)$ ponendo:

$$F(x, y, 1) = 0 ,$$

$$F(x, y, \zeta_{n,t}) = \begin{cases} \overline{\Phi}_n(x, y)/p_n & \text{se } t = 1, 3, \ldots, p_n - 1 \\ 0 & \text{se } t = 0, 2, \ldots, p_n \end{cases}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

e stabilendo inoltre che la funzione $F(\bar{x}, \bar{y}, z)$ varii linearmente su ciascuno dei segmenti $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$, $\zeta_{n,t} \leqslant z \leqslant \zeta_{n,t+1}$; $t = 0, 1, \ldots, p_n - 1$.

Manifestamente la funzione $F(x, y, z)$ è continua in tutti i punti di C per i quali sia $z < 1$. D'altra parte osserviamo che se $\zeta_{n,0} \leqslant z \leqslant \zeta_{n+1,0}$ si ha

$$0 \leqslant F(x, y, z) \leqslant M_n/p_n < \frac{1}{n+1} = 1 - \zeta_{n+1,0} \leqslant 1 - z ,$$

e da questa e dalla $F(x, y, 1) = 0$ segue che la funzione $F(x, y, z)$ è continua anche in tutti i punti $(x, y, 1)$ di C e quindi è continua in tutto il cubo chiuso C. Segue altresì dalla definizione che $F(x, y, z)$ è nulla sulla frontiera di C.

Sia ora $\bar{z}$, $0 \leqslant \bar{z} \leqslant 1$, un numero reale. Per un opportuno intero n si avrà $\zeta_{n,0} \leqslant \bar{z} \leqslant \zeta_{n+1,0}$, e quindi esisterà una costante η, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, indipendente da x e da y, tale che, per ogni (x, y) di $(0, 1; 0, 1)$ sia

$$F(x, y, \bar{z}) = \frac{\eta}{p_n} \overline{\Phi}_n(x, y) .$$

Ne segue, per ogni (x, y) di $(0, 1; 0, 1)$:

$$V_x(y, \bar{z}) \leqslant \frac{\eta}{p_n} \cdot 2m_n M_n < 1 , \qquad V_y(x, \bar{z}) \leqslant \frac{\eta}{p_n} \cdot 2m_n M_n < 1 .$$

È così dimostrato che le funzioni $V_x(y, z)$ e $V_y(x, z)$ sono limitate in $(0, 1; 0, 1)$.

Si ha infine

$$V_z(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \frac{\overline{\Phi}_n(x, y)}{p_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\Phi}(x, y) = \overline{\varphi}(x, y) ,$$

ove $\overline{\varphi}(x, y)$ è la funzione definita al n. 8, b). È così dimostrato che $V(x, y)$ è una funzione S.

13. – Teorema III. *Esiste una funzione $G(x, y, z)$ continua e non negativa nel cubo chiuso $C \equiv (0, 1; 0, 1; 0, 1)$, nulla sulla frontiera di C, a variazione limitata secondo* TONELLI, *e tale che le sue variazioni totali sono ovunque finite, le variazioni totali $V_x(y, z)$ e $V_y(x, z)$ sono limitate, e la variazione totale $V_z(x, y) = V_z(x, y, 1)$ nonchè tutte le differenze $V_z(x, y, z_0 + \lambda) - V(x, y, z_0)$ $(0 \leqslant z_0 < z_0 + \lambda \leqslant 1)$, sono funzioni S* [15].

Procediamo come nel teorema precedente e, per ogni interno n, diciamo p_n il più piccolo intero pari tale che, posto $q_n = p_1 p_2 \ldots p_n$, risulti:

$$\frac{2m_n M_n}{q_n} < \frac{1}{2_n} , \qquad \frac{1}{q_n} (2^{n-1} M_1 + \ldots + 2 M_{n-1} + M_n) < \frac{1}{2^n} . \tag{13}$$

Per ogni intero n dividiamo il segmento $(0, 1)$ in q_n parti uguali $\delta_{n,0}$, $\delta_{n,1}, \ldots, \delta_{n,q_n - 1}$, e siano $0 = \zeta_{n,0}, \zeta_{n,1}, \ldots, \zeta_{n,q_n} = 1$ i punti di divisione. Dalla definizione dei numeri q_n segue che per ogni $r = 1, 2, \ldots, q_{n-1}$, gli intervalli $\delta_{n,(r-1)p_n}$, $\delta_{n,(r-1)p_n+1}, \ldots$, $\delta_{n,(r-1)p_n+p_n-2}$, $\delta_{n, rp_n - 1}$ costituiscono una suddivisione in p_n parti uguali dell'intervallo $\delta_{n-1,r}$. Andiamo ora a definire le funzioni $F_n(x, y, z)$, $(n=1, 2, \ldots)$, nel cubo chiuso C, stabilendo che per ogni n la fun-

---

([15]) Si osservi che essendo $G(x, y, z)$ funzione continua nel cubo chiuso C, risulta, per ogni z_0, $V_z(x, y, z_0 + 0) = V_z(x, y, z_0)$. Cfr. le condizioni del teorema A.

zione $F_n(x, y, z)$ — come funzione della sola z — varii linearmente in ciascuno degli intervalli $\delta_{n,t} = (\zeta_{n,t} \leqslant z \leqslant \zeta_{n,t+1})$; $t = 1, 2, \ldots, q_n$. Basterà quindi per ogni n assegnare i valori che la funzione $F_n(x, y, z)$ deve assumere per $z = \zeta_{n,t}$, $(t = 1, 2, \ldots, q_n)$. Poniamo

$$F_1(x, y, \zeta_{1,t}) = \begin{cases} \overline{\Phi}_1(x, y)/q_1 & \text{se } t = 1, 3, \ldots, q_1 - 1\,, \\ 0 & \text{se } t = 0, 2, \ldots, q_1 \quad ; \end{cases}$$

$$F_2(x, y, \zeta_{2,t}) = \begin{cases} F_1(x, y, \zeta_{2,t}) & \text{se } t = 0, 2, \ldots, q_2 \quad , \\ F_1(x, y, \zeta_{2,t+1}) + \overline{\Phi}_2(x, y)/q_2 & \text{se } t = rp_2 + s\,, \begin{cases} r = 0, 2, \ldots, q_1 - 2\,, \\ s = 1, 3, \ldots, p_2 - 1\,, \end{cases} \\ F_1(x, y, \zeta_{2,t-1}) + \overline{\Phi}_2(x, y)/q_2 & \text{se } t = rp_2 + s\,, \begin{cases} r = 1, 3, \ldots, q_1 - 1\,, \\ s = 1, 3, \ldots, p_2 - 1\,; \end{cases} \end{cases}$$

. . . .

$$F_n(x, y, \zeta_{n,t}) = \begin{cases} F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t}) & \text{se } t = 0, 2, \ldots, q_n\,, \\ F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t+1}) + \overline{\Phi}_n(x, y)/q_n & \text{se } t = rp_n + s\,, \begin{cases} r = 0, 2, \ldots, q_{n-1} - 2\,, \\ s = 1, 3, \ldots, p_n - 1\,, \end{cases} \\ F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t-1}) + \overline{\Phi}_n(x, y)/q_n & \text{se } t = rp_n + s\,, \begin{cases} r = 1, 3, \ldots, q_{n-1} - 1\,, \\ s = 1, 3, \ldots, p_n - 1\,; \end{cases} \end{cases}$$

. . . .

Le funzioni $F_n(x, y, z)$ sono continue nel cubo chiuso C e nulle sulla frontiera di C.

a) Cominciamo col dimostrare che per ogni intero n si ha

$$(14) \qquad F_n(x, y, \zeta_{n,t+1}) - F_n(x, y, \zeta_{n,t}) \begin{cases} > 0 & \text{se } t = 0, 2, \ldots, q_n - 2 \\ < 0 & \text{se } t = 1, 3, \ldots, q_n - 1\,. \end{cases}$$

Dimostreremo la (14) per induzione. Per $n = 1$ la (14) è evidente. Supposta la (14) vera per tutti gli interi fino ad $n - 1$, dimostriamola per n. Intanto, posto $t = rp_n + s$; $r = 0, 1, 2, \ldots, q_{n-1} - 1$; $s = 0, 1, \ldots, p_n - 1$, risulta:

$$\zeta_{n-1,r} = \zeta_{n,rp_n} \leqslant \zeta_{n,t} < \zeta_{n,t+1} \leqslant \zeta_{n,(r+1)p_n} = \zeta_{n-1,r+1}\,.$$

Ma p_n è pari, e quindi, se $t = 1, 3, \ldots, q_n - 1$, deve essere

$$\zeta_{n-1,r} = \zeta_{n,rp_n} \leqslant \zeta_{n,t-1} < \zeta_{n,t} < \zeta_{n,t+1} \leqslant \zeta_{n,(r+1)p_n} = \zeta_{n-1,r+1}\,.$$

La (14) è vera per $n-1$, e quindi, secondochè è $r=0, 2,\ldots, q_{n-1}-2$ ovvero $r=1, 3,\ldots, q_{n-1}-1$ si ha

$$F_{n-1}(x, y, \zeta_{n-1,r}) < F_{n-1}(x, y, \zeta_{n-1,r+1})$$

oppure

$$F_{n-1}(x, y, \zeta_{n-1,r}) > F_{n-1}(x, y, \zeta_{n-1,r+1}) .$$

Ne segue, essendo F_{n-1} lineare rispetto a z nell'intervallo $\delta_{n-1,r+1} = (\zeta_{n-1,r}, \zeta_{n-1,r+1})$:

$$F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t-1}) < F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t}) < F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t+1})$$

oppure

$$F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t-1}) > F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t}) > F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t+1}) .$$

E quindi, nel primo caso

$$F_n(x, y, \zeta_{n,t}) = F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t+1}) + \overline{\Phi}_n(x, y)/q_n > \\ > \begin{cases} F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t+1}) = F_n(x, y, \zeta_{n,t+1}) \\ F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t-1}) = F_n(x, y, \zeta_{n,t-1}) \,, \end{cases}$$

e nel secondo

$$F_n(x, y, \zeta_{n,t}) = F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t-1}) + \overline{\Phi}_n(x, y)/q_n > \\ > \begin{cases} F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t-1}) = F_n(x, y, \zeta_{n,t-1}) \\ F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t+1}) = F_n(x, y, \zeta_{n,t+1}) \,. \end{cases}$$

Dunque, in entrambi i casi, per ogni $t=1, 3,\ldots, q_n-1$ si ha

$$F_n(x, y, \zeta_{n,t-1}) < F_n(x, y, \zeta_{n,t}) \; ; \qquad F_n(x, y, \zeta_{n,t+1}) < F_n(x, y, \zeta_{n,t})$$

ciò che dimostra la (14).

b) Poniamo

$$\bar{\varphi}_n(x, y) = \sum_{N=1}^{n} \overline{\Phi}_N(x, y), \qquad n=1, 2,\ldots, \tag{15}$$

$$v_{n,t}(x, y) = | F_n(x, y, \zeta_{n,t}) - F_n(x, y, \zeta_{n,t+1}) | \; ; \quad t=0, 1,\ldots, q_n-1; \; n=1, 2,\ldots .$$

Dimostriamo per induzione che per ogni n si ha

$$\sum_{t=0}^{q_n-1} v_{n,t}(x, y) = \bar{\varphi}_n(x, y), \qquad n=1, 2,\ldots . \tag{16}$$

La (16) è vera per $n=1$. Infatti

$$v_{1,t} = \overline{\Phi}_1(x, y)/q_1 \,, \qquad t=0, \,,1 \,,2\ldots, q_1-1$$

da cui senz'altro l'asserto. Supponiamo ora che la (16) sia vera per tutti gli interi fino ad $n-1$ e dimostriamola vera per n. Poniamo come sopra $t = rp_n + s$; $r = 0, 1, \ldots\ q_{n-1}-1$; $s = 0, 1, \ldots, p_n - 1$, e supponiamo t dispari, cioè $t = 1, 3, \ldots, q_n - 1$. Secondochè è $r = 0, 2, \ldots, q_{n-1} - 2$, oppure $r = 1, 3, \ldots, q_{n-1} - 1$, risulta

$$\begin{cases} F_n(x, y, \zeta_{n,t}) = F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t+1}) + \overline{\Phi}_n(x, y)/q_n \\ F_n(x, y, \zeta_{n,t+1}) = F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t+1}) \\ F_n(x, y, \zeta_{n,t-1}) = F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t-1}) \\ 0 < F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t+1}) - F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t-1}) = 2v_{n-1,r}/p_n \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} F_n(x, y, \zeta_{n,t}) = F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t-1}) + \overline{\Phi}_n(x, y)/q_n \\ F_n(x, y, \zeta_{n,t+1}) = F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t+1}) \\ F_n(x, y, \zeta_{n,t-1}) = F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t-1}) \\ 0 < F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t-1}) - F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t+1}) = 2v_{n-1,r}/p_n \end{cases}$$

e quindi rispettivamente

$$\begin{cases} 0 < F_n(x, y, \zeta_{n,t}) - F_n(x, y, \zeta_{n,t+1}) = \overline{\Phi}_n(x, y)/q_n \\ 0 < F_n(x, y, \zeta_{n,t}) - F_n(x, y, \zeta_{n,t-1}) = 2v_{n-1,r}/p_n + \overline{\Phi}_n(x, y)/q_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < F_n(x, y, \zeta_{n,t}) - F_n(x, y, \zeta_{n,t+1}) = 2v_{n-1,r}/p_n + \overline{\Phi}_n(x, y)/q_n \\ 0 < F_n(x, y, \zeta_{n,t}) - F_n(x, y, \zeta_{n,t-1}) = \overline{\Phi}_n(x, y)/q_n\,. \end{cases}$$

In entrambi i casi si ha

(17) $$v_{n,t-1} + v_{n,t} = 2v_{n-1,r}/p_n + 2\overline{\Phi}_n(x, y)/q_n; \quad t = 1, 3, \ldots, q_n - 1$$

ed infine

$$\sum_{t=0}^{q_n-1} v_{n,t} = \sum_{r=0}^{q_{n-1}-1} \frac{p_n}{2}\frac{2v_{n-1,r}}{p_n} + \frac{q_n}{2}\frac{2\overline{\Phi}_n(x, y)}{q_n} = \sum_{r=0}^{q_{n-1}-1} v_{n-1,r} + \overline{\Phi}_n(x, y)\,.$$

Ma la (16) è vera per $n-1$ e quindi

$$\sum_{t=0}^{q_n-1} v_{n,t} = \overline{\varphi}_{n-1}(x, y) + \overline{\Phi}_n(x, y) = \overline{\varphi}_n(x, y)\,.$$

La (16) è così dimostrata in generale.

c) Diciamo $V_n(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ la variazione totale della funzione $F_n(\bar{x}, \bar{y}, z)$ nell'intervallo $(0, \bar{z})$. Dimostriamo che è, per ogni $n > \nu$,

$$V_n(x, y, \zeta_{\nu,t+1}) - V_n(x, y, \zeta_{\nu,t}) > \frac{1}{q_\nu}[\bar{\varphi}_n(x, y) - \bar{\varphi}_\nu(x, y)] . \tag{18}$$

La (18) per $n = \nu$ è banale; supposto ora che sia

$$V_{\nu+k-1}(x, y, \zeta_{\nu,t+1}) - V_{\nu+k-1}(x, y, \zeta_{\nu,t}) > \frac{1}{q_\nu}[\bar{\varphi}_{\nu+k-1} - \bar{\varphi}_\nu] ,$$

proviamo che è

$$V_{\nu+k}(x, y, \zeta_{\nu,t+1}) - V_{\nu+k}(x, y, \zeta_{\nu,t}) > \frac{1}{q_\nu}[\bar{\varphi}_{\nu+k} - \bar{\varphi}_\nu] .$$

Ricordando infatti che ogni intervallo $\delta_{\nu,t}$ risulta diviso in $p_{\nu+1}p_{\nu+2}\cdots p_{\nu+k} = q_{\nu+k}/q_\nu$ intervalli uguali $\delta_{\nu+k,t}$, su ciascuno dei quali la $F_{\nu+k}$ varia linearmente, tenute presenti le (14), risulta

$$\begin{aligned} & V_{\nu+k}(x, y, \zeta_{\nu,t+1}) - V_{\nu+k}(x, y, \zeta_{\nu,t}) = \\ & = V_{\nu+k-1}(x, y, \zeta_{\nu,t+1}) - V_{\nu+k-1}(x, y, \zeta_{\nu,t}) + \frac{q_{\nu+k}}{q_\nu}\frac{\bar{\Phi}_{\nu+k}(x, y)}{q_{\nu+k}} = \\ & \qquad = V_{\nu+k-1}(x, y, \zeta_{\nu,t+1}) - V_{\nu+k-1}(x, y, \zeta_{\nu,t}) + \frac{\bar{\Phi}_{\nu+k}(x, y)}{q_\nu} > \\ & \qquad > \frac{1}{q_\nu}[\bar{\varphi}_{\nu+k-1}(x, y) - \bar{\varphi}_\nu(x, y) + \bar{\Phi}_{\nu+k}(x, y)] = \frac{1}{q_\nu}[\bar{\varphi}_{\nu+k} - \bar{\varphi}_\nu] , \end{aligned}$$

onde la (18).

d) Dimostriamo ora la seguente proposizione:

Per ogni $0 \leqslant \bar{z} \leqslant 1$ *e per ogni intero* n *esistono* n *costanti* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, $0 \leqslant \eta_i \leqslant 1$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *tali che, per ogni* (x, y) *di* $(0, 1; 0, 1)$, *si ha*:

$$F_n(x, y, \bar{z}) = \eta_1\frac{\bar{\Phi}_1(x, y)}{q_1} + \eta_2\frac{\bar{\Phi}_2(x, y)}{q_2} + \ldots + \eta_n\frac{\bar{\Phi}_n(x, y)}{q_n} . \tag{19}$$

Dimostriamo quanto sopra per induzione, rilevando innanzi tutto che, essendo le funzioni $F_n(x, y, z)$ come funzioni della sola z lineari negli intervalli $\delta_{n,t} = (\zeta_{n,t}, \zeta_{n,t+1})$, basterà dimostrare la (19) per ogni $z = z_{n,t}$, $t = 0, 1, 2, \ldots, q_n$. Con questa osservazione risulta evidente dalla definizione della funzione $F_1(x, y, z)$ che la (19) è vera per $n = 1$. Supponiamo quindi la (19) vera per tutti gli interi fino ad $n - 1$ e dimostriamola vera per n.

Se t è pari si ha infatti

$$F_n(x, y, \zeta_{n,t}) = F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t}) = \eta_1\frac{\bar{\Phi}_1}{q_1} + \ldots + \eta_{n-1}\frac{\bar{\Phi}_{n-1}}{q_{n-1}} .$$

Se t è dispari, cioè $t = 1, 3, \ldots, q_n - 1$, posto $t = rp_n + s$, $(s = 1, 3, \ldots, p_n - 1)$,

$r = 0, 1, \ldots, q_{n-1} - 1$), secondochè è $r = 0, 2, \ldots, q_{n-1} - 2$, oppure $r = 1, 3, \ldots, q_{n-1} - 1$, si ha

$$F_n(x, y, \zeta_{n,t}) = F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t+1}) + \overline{\Phi}_n(x, y)/q_n ,$$
$$F_n(x, y, \zeta_{n,t}) = F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t-1}) + \overline{\Phi}_n(x, y)/q_n$$

e quindi, in ogni caso,

$$F_n(x, y, \zeta_{n,t}) = \eta_1 \frac{\overline{\Phi}_1}{q_1} + \eta_2 \frac{\overline{\Phi}_2}{q_2} + \ldots + \eta_{n-1} \frac{\overline{\Phi}_{n-1}}{q_{n-1}} + \frac{\overline{\Phi}_n}{q_n} .$$

La c) è così dimostrata in generale.

e) Dimostriamo che, per ogni n, si ha

$$(20) \qquad | F_n(x, y, \zeta_{n,t+1}) - F_n(x, y, \zeta_{n,t}) | \leqslant \frac{1}{q_n} [2^{n-1}M_1 + 2^{n-2}M_2 + \ldots + M_n]$$

(dove $M_1, \ldots, M_n$ hanno il significato definito al Teorema II).

La (20) è evidentemente vera per $n = 1$. Supposto che essa sia vera per tutti gli interi fino ad $n - 1$, dimostriamolo vera per n.

Infatti per ogni t dispari, cioè $t = 1, 3, \ldots, q_n - 1$, posto $t = rp_n + s$, ($r = 0, 1, 2, \ldots, q_{n-1} - 1$, $s = 0, 1, 2, \ldots, p_n - 1$), si ha

$$\begin{cases} 0 < F_n(x, y, \zeta_{n,t}) - F_n(x, y, \zeta_{n,t-1}) = \dfrac{2}{p_n} | F_n(x, y, \zeta_{n-1,r}) - F_n(x, y, \zeta_{n-1,r+1}) | + \\ \qquad\qquad + \overline{\Phi}_n(x, y)/q_n \\ 0 < F_n(x, y, \zeta_{n,t}) - F_n(x, y, \zeta_{n,t+1}) = \overline{\Phi}_n(x, y)/q_n \end{cases}$$

se $r = 0, 2, \ldots, q_{n-1} - 2$; e

$$\begin{cases} 0 < F_n(x, y, \zeta_{n,t}) - F_n(x, y, \zeta_{n,t-1}) = \overline{\Phi}_n(x, y)/q_n \\ 0 < F_n(x, y, \zeta_{n,t}) - F_n(x, y, \zeta_{n,t+1}) = \dfrac{2}{p_n} | F_n(x, y, \zeta_{n-1,r}) - F_n(x, y, \zeta_{n-1,r+1}) | + \\ \qquad\qquad + \overline{\Phi}_n(x, y)/q_n \end{cases}$$

se $r = 1, 3, \ldots, q_{n-1} - 1$. In entrambi i casi si ha

$$0 < | F_n(x, y, \zeta_{n,t}) - F_n(x, y, \zeta_{n,t\pm 1}) | \leqslant \frac{2}{p_n} \frac{1}{q_{n-1}} (2^{n-2}M_1 + \ldots + 2M_{n-2} + M_{n-1}) +$$
$$+ \overline{\Phi}_n/q_n \leqslant \frac{1}{q_n} (2^{n-1}M_1 + \ldots + 2M_{n-1} + M_n) .$$

La (21) è così dimostrata in generale.

f) Dimostriamo che per ogni (x, y, z) di $(0, 1; 0, 1; 0, 1)$ e per ogni intero n si ha

$$(21) \qquad 0 \leqslant F_n(x, y, z) - F_{n-1}(x, y, z) \leqslant \frac{1}{q_n} (2^{n-2}M_1 + \ldots + M_{n-1} + M_n) .$$

Basta dimostrare questa relazione per ogni $z = \zeta_{n,t}$; $t = 0, 1, \ldots, q_n$, e perciò anche soltanto per $z = \zeta_{n,t}$; $t = 1, 3, \ldots, q_n - 1$, essendo:

$$F_n(x, y, \zeta_{n,t}) = F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t}) \quad \text{per ogni } t \text{ pari.}$$

Per ogni $t = 1, 3, \ldots, q_n - 1$ si ha ora:

$$F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t}) = \frac{1}{2}\left[F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t-1}) + F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t+1})\right],$$

$$F_n(x, y, \zeta_{n,t}) = \max\left[F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t-1})\ ;\ F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t+1})\right] + \overline{\Phi}_n(x, y)/q_n$$

e quindi, posto $t = rp_n + s$, $(r = 0, 1, \ldots, q_{n-1} - 1;\ s = 1, 3, \ldots, p_n - 1)$,

$$\begin{aligned} 0 \leq F_n(x, y, \zeta_{n,t}) - F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t}) &= \\ &= \frac{1}{2}\left| F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t+1}) - F_{n-1}(x, y, \zeta_{n,t-1}) \right| + \overline{\Phi}_n(x, y)/q_n = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{p_n}\left| F_{n-1}(x, y, \zeta_{n-1,r}) - F_{n-1}(x, y, \zeta_{n-1,r+1}) \right| + \overline{\Phi}_n(x, y)/q_n \leq \\ &\leq \frac{1}{p_n q_{n-1}}(2^{n-2}M_1 + \ldots + 2M_{n-2} + M_{n-1}) + \overline{\Phi}_n(x, y)/q_n \leq \\ &\leq \frac{1}{q_n}(2^{n-2}M_1 + \ldots + 2M_{n-2} + M_{n-1} + M_n)\,. \end{aligned}$$

La (21) è così completamente dimostrata.

g) Dalla (13) e dalla (21) segue infine

$$0 \leq F_n(x, y, z) - F_{n-1}(x, y, z) < \frac{1}{q_n}(2^{n-1}M_1 + \ldots + 2M_{n-1} + M_n) < \frac{1}{2^n}$$

e di qui la convergenza assoluta ed uniforme nel cubo chiuso C della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[F_{n+1}(x, y, z) - F_n(x, y, z)\right].$$

Ne deriva che esiste finito in ogni punto (x, y, z) del cubo chiuso C il limite seguente:

$$G(x, y, z) = \lim_{n \to \infty} F_n(x, y, z) \tag{22}$$

e la funzione $G(x, y, z)$ risulta continua e non negativa nel cubo chiuso C, nulla sulla frontiera di C, tali essendo tutte le funzioni F_n.

Diciamo ora $V_{n,x}(y, z)$, $V_{n,y}(x, z)$, $V_{n,z}(x, y)$ le variazioni totali della funzione $F_n(x, y, z)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, e $V_x(y, z)$, $V_y(x, z)$, $V_z(x, y)$ quelle della funzione $G(x, y, z)$.

Dalle (13) e (19) e da quanto si è detto nella dimostrazione del teorema II, segue ([16]):

$$V_{n,x}(y, z) \leqslant \frac{2m_1 M_1}{q_1} + \frac{2m_2 M_2}{q_2} + \ldots + \frac{2m_n M_n}{q_n} < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 2$$

e analogamente $V_{n,y}(x, z) < 2$.

Dal Lemma IV segue immediatamente, per ogni (y, z) e per ogni (x, z),

$$V_x(y, z) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} V_{n,x}(y, z) \leqslant 2 \,, \qquad V_y(x, z) \leqslant 2 \,.$$

Dalle (15) e (16) segue, per ogni n e ogni (x, y),

$$V_{n,z}(x, y) = \overline{\varphi}_n(x, y)$$

e, per il Lemma V,

$$V_z(x, y) = \lim_{n\to\infty} V_{n,z}(x, y) = \overline{\varphi}(x, y) \,,$$

ove $\overline{\varphi}(x, y)$ è la funzione considerata al n. 8, *b*), che, come si è visto, è una funzione S.

Sia infine ν il minimo valore di n per cui $|\,\delta_{n,t}\,| < \lambda/3$; τ il minimo valore di t per cui $\zeta_{\nu,\tau} > z_0$; sarà allora:

$$0 \leqslant z_0 < \zeta_{\nu,\tau} < \zeta_{\nu,\tau+1} < z_0 + \lambda \leqslant 1$$

nonchè

$$V(x, y, \zeta_{\nu,\tau+1}) - V(x, y, \zeta_{\nu,\tau}) \leqslant V(x, y, z_0 + \lambda) - V(x, y, z_0) \leqslant V(x, y) = \overline{\varphi}(x, y) \;;$$

ma, in forza del lemma V e di *c*),

$$V(x, y, \zeta_{\nu,\tau+1}) - V(x, y, \zeta_{\nu,\tau}) = \lim_{n\to\infty} [V_n(x, y, \zeta_{\nu,\tau+1}) - V_n(x, y, \zeta_{\nu,\tau})] \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\overline{\varphi}_n(x, y) - \overline{\varphi}_\nu(x, y)}{q_\nu} = \frac{1}{q_\nu} R_\nu(x, y) \,,$$

dove $R_\nu(x, y)$ indica il resto ν-esimo della serie definita al n. 8, *b*), il quale (n. 8, *g*)) è ancora una funzione S, onde la differenza $V(x, y, z_0+\lambda) - V(x, y, z_0)$, essendo compresa tra due funzioni S è una funzione S (n. 8, *e*)).

Il teorema III è così completamente dimostrato.

([16]) Ricordiamo che se $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, $F(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, sono funzioni continue in (a, b), e V_1, V_2, ..., V_n, V sono le loro variazioni totali, si ha $V \leqslant V_1 + V_2 + \ldots + V_n$.